

Projektive Reduktion - eine neue Methode zur Berechnung von Erwartungswerten in der geometrischen Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bertrand F. Evertz

22. Januar 2012

Abstract

Projective Reduction, a new technique for calculating expected values and distribution functions in the field of geometric probability, is introduced and applied to several fundamental problems. The so far not known values of the mean distance of the points and the corresponding distribution functions are calculated for the arbitrary triangle, the regular pentagon, the regular hexagon and the regular tetrahedron. Additional results and possible applications are presented.

Zusammenfassung

Die Projektive Reduktion wird als neue Technik zur Berechnung von Erwartungswerten und Verteilungsfunktionen in der geometrischen Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt und auf mehrere fundamentale Probleme angewandt. Unter anderem werden die bislang unbekanntenen Werte des mittleren Abstandes der Punkte in einem beliebigen Dreieck, dem regulären Fünfeck, dem regulären Sechseck und dem regulären Tetraeder auf diesem Wege einschließlich der korrespondierenden Verteilungsfunktionen berechnet sowie weitere Ergebnisse und Anwendungsmöglichkeiten diskutiert.

Mail-Adresse des Autors: mail@evertz-web.de

[link to english version](#)

Inhaltsverzeichnis

1	Widmung	3
2	Einleitung	4
3	Der mittlere Abstand zweier Punkte eines Dreiecks	6
3.1	Prinzip der projektiven Reduktion	6
3.2	Erster Reduktionsschritt	8
3.3	Die weiteren Reduktionsschritte	11
3.4	Die konkrete Berechnung des Erwartungswertes	13
4	Der mittlere Abstand der Punkte eines konvexen Polygons	17
4.1	Das reguläre Fünfeck	17
4.2	Das reguläre Sechseck	23
4.3	Unregelmäßige konvexe Polygone	27
5	Der mittlere Abstand der Punkte nicht-konvexer Flächen	30
5.1	Das konkave Viereck	30
5.2	Getrennte Flächen	33
5.3	Ein Stern als komplexes Beispiel	35
6	Berechnung der Verteilungsfunktionen	39
6.1	Die Verteilungsfunktion in zweidimensionalen Figuren	40
6.2	Die konkrete Berechnung der Verteilungsfunktionen	41
6.3	Die Verteilungsfunktion im beliebigen Dreieck	52
7	Der mittlere Abstand der Punkte im regulären Tetraeder	56
7.1	Verteilungsfunktion	59
7.2	Erwartungswert beim Hypertetraeder	61
8	Nachwort	63
9	Literatur	64

1 Widmung

Es ist ungewöhnlich, dass ein Arzt, noch dazu ein Psychiater, eine längere mathematische Arbeit veröffentlicht. Dass ich dies dennoch tue, verdanke ich der großen Freude am wissenschaftlichen und philosophischen Denken, die mir von früh auf von meinem Vater, dem Mathematiker und Computerpionier W. P. Evertz, vermittelt wurde, der mich mein Leben lang in allen Lebensbereichen gefördert hat. Ihm widme ich diese Arbeit in Dankbarkeit.

2 Einleitung

”Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty . . .”
– *Bertrand Russel*

Seit über 250 Jahren fasziniert die Berechnung geometrischer Wahrscheinlichkeiten viele Mathematiker durch die Verbindung von Geometrie, Stochastik und Analysis sowie durch anschauliche, sogar scheinbar einfache Problemstellungen, die jedoch oft komplexe Lösungsansätze erfordern.

Die Beschäftigung mit dem 4-Punkte-Problem nach Sylvester führte zu erheblichen theoretischen Fortschritten, unter anderem die Crofton’sche Formel, die neben anderem die Berechnung der mittleren Fläche eines zufälligen Dreiecks in einem regelmäßigen Polygon oder des mittleren Volumens eines zufälligen n -dimensionalen Tetraeder in der n -dimensionalen Hyperkugel ermöglichten.

Gerade daher überrascht es, dass weniger anspruchsvoll erscheinende Fragestellungen, wie etwa Erwartungswert und Verteilungsfunktion des Abstandes zweier Punkte in vielen 2-dimensionalen Figuren weiter ungelöst blieben, allen voran in der elementarsten geometrischen Figur, dem beliebigen Dreieck. Hier zeigt sich, dass die übliche analytische Vorgehensweise bereits in diesem Fall zu einem 4-dimensionalen Integral (über beide Koordinaten der beiden Punkte) führt, das nur bei symmetrischen Randbedingungen mit beherrschbarem Aufwand zu lösen ist. So konnte mit Hilfe von Computer Algebra Systemen in den letzten Jahren immerhin der Erwartungswert für einzelne spezielle Dreiecke berechnet werden. Bei fehlender Symmetrie wachsen die analytischen Anforderungen allerdings rasch an, so dass bislang keine allgemeingültige Lösung gefunden werden konnte.

Die Methode der Projektiven Reduktion umgeht dieses Problem hingegen dadurch, dass die zu berechnenden Integrale bereits im Grundansatz durch eine Reduktion der Freiheitsgrade der zufälligen Punkte wesentlich vereinfacht werden. Hier sind Parallelen zur Crofton’schen Formel zu sehen, die allerdings immer nur einen der Punkte am Rand der untersuchten Grundfigur fixiert; mit der projektiven Reduktion kann dies durch wiederholte Anwendung auch für mehr als einen Punkt gelingen. Die ungewohnte Herangehensweise wird in Kapitel 3 erst an konkreten Teilschritten, dann allgemein erläutert. Die folgenden Kapitel zeigen verschiedene Anwendungsmöglichkeiten und Erweiterungen der Methode auf.

Erwähnenswert ist die große Übereinstimmung mit der Herangehensweise von Johan Philip, der mit seinen Begriffen von der Größe (“size”) und Form (“shape”) ähnliche Unterscheidungen erzielt wie die Projektive Reduktion mit den Begriffen Projektionsfaktor und Erwartungswert der Projektion und damit wesentliche Problemstellungen wie das mittlere Volumen eines zufälligen Tetraeders in einem Würfel lösen konnte.

Die Projektive Reduktion geht aber in mehreren Aspekten über diesen Ansatz deutlich hinaus: Erstens dürfen der gesuchte Erwartungswert und der Körper, in dem die zugehörigen Punkte zufällig gewählt werden, verschiedene Dimensionen haben, was ganz andere Problemstellungen untersuchbar macht. Zweitens weist die Projektive Vereinfachung allgemein die Unabhängigkeit von “size” und

“shape” nach, die bei Philip jeweils im Einzelfall belegt werden muss. Drittens wird durch das Herunterbrechen der Gesamtprojektion auf einzelne, getrennte Teilschritte eine präzise Fallunterscheidung eingeführt, die es beispielsweise ermöglicht, auch bestimmte konkave Polygone zu untersuchen. Und schließlich erhält man durch die Unabhängigkeit der Berechnung der Erwartungswerte von der wesentlich anspruchsvolleren Berechnung der entsprechenden Verteilungsfunktionen eine zusätzliche Kontrolle im Hinblick auf die Richtigkeit der Ergebnisse.

3 Der mittlere Abstand zweier Punkte eines Dreiecks

In dieser Abhandlung wird eine besondere Notation zur Beschreibung eines geometrischen Erwartungswertes verwendet: So stellt $E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in M_1 \wedge Q_2 \in M_2)$ den Erwartungswert der Länge der Strecke $\overline{Q_1Q_2}$ dar, unter der Bedingung, dass Q_1 in M_1 und Q_2 in M_2 vollkommen gleichverteilt sind. M_1 und M_2 sind dabei stets konvexe Punktmenge(n) (oder können in endlich viele konvexe Punktmenge(n) unterteilt werden) wie Strecken, konvexe Flächen und konvexe Körper. Falls M_1 ein einzelner Punkt P ist, verkürzt sich die Schreibweise zu $E(\overline{PQ} | Q \in M_2)$.

3.1 Prinzip der projektiven Reduktion

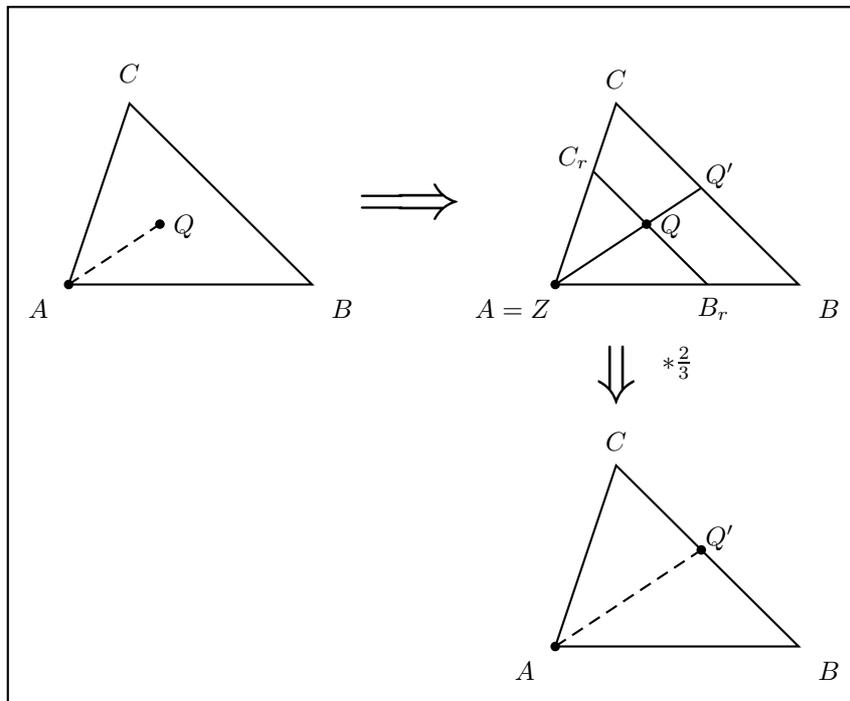


Abbildung 1: Triangle Point Picking

Betrachten wir zunächst den vereinfachten Fall des mittleren Abstandes eines beliebigen Punktes Q im $\triangle ABC$ zur Ecke A , wobei die Lage von Q innerhalb der Fläche des $\triangle ABC$ gleichverteilt ist. Dies wird im Englischen üblicherweise als Triangle Point Picking bezeichnet (siehe Abbildung 1).

Der entsprechende Erwartungswert für die Länge der Strecke \overline{AQ} wird als

$$E_1 = E(\overline{AQ} | Q \in \triangle ABC)$$

bezeichnet. Bildet man nun das $\triangle ABC$ mittels Streckung mit dem Streckzentrum $Z = A$ mit den Faktor $r < 1$ auf das $\triangle AB_rC_r$ ab, so liegt der Punkt Q aufgrund der Gleichverteilung mit der Wahrscheinlichkeit $F(r) = A(\triangle AB_rC_r) : A(\triangle ABC) = r^2$ innerhalb von $\triangle AB_rC_r$. Die Dichtefunktion für das Ereignis, dass Q auf $\overline{B_rC_r}$ liegt, beträgt daher $f(r) = F'(r) = 2r$.

Für diesen Fall, dass Q auf $\overline{B_rC_r}$ liegt, ist Q völlig gleichverteilt innerhalb der Strecke $\overline{B_rC_r}$ (ein Faktum, das nicht für gekrümmte Begrenzungen gilt). Die Gleichverteilung zeigt sich, wenn man die Streckung mit zwei verschiedene Streckfaktoren r und $(r+h)$ betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit, dass Q innerhalb des entstehenden Trapezes $B_rC_rC_{(r+h)}B_{(r+h)}$ liegt, ist völlig gleichverteilt. Bei $\lim h \rightarrow 0$ geht mit $B_rC_rC_{(r+h)}B_{(r+h)} \rightarrow \overline{B_rC_r}$ die Gleichverteilung innerhalb des Trapezes also auf die Gleichverteilung von Q Innerhalb der Strecke $\overline{B_rC_r}$ über.

Der von r abhängige (bedingte) Erwartungswert E_{1r} beträgt nun

$$E_{1r} = E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{B_rC_r})$$

Gemäß den Regeln zur Berechnung bedingter Erwartungswerte erhält man nun:

$$E_1 = \int_0^1 f(r)E_{1r} dr = \int_0^1 f(r)E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{B_rC_r}) dr$$

Der Term $f(r)E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{B_rC_r})$ lässt sich aufgrund folgender Überlegungen weiter umformen: Wird das $\triangle AB_rC_r$ durch Streckung in A um den Faktor $\frac{1}{r}$ zurück auf das $\triangle ABC$ projiziert, so liegt der Bildpunkt Q' von Q auf \overline{BC} und ist dort wiederum völlig gleichverteilt. Es gilt $\overline{AQ'} = \frac{1}{r}\overline{AQ}$, unabhängig von der Lage von Q auf $\overline{B_rC_r}$. Also ist

$$\begin{aligned} E_{1r} &= E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{B_rC_r}) \\ &= r E(\overline{AQ'} \mid Q' \in \overline{BC}) \\ &= r E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{BC}) \end{aligned}$$

Der Term $E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{BC})$ ist aber von r unabhängig, daher gilt:

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_0^1 f(r)E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{B_rC_r}) dr \\ &= \int_0^1 f(r)rE(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{BC}) dr \\ &= \int_0^1 f(r)r dr E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{BC}) \\ &= \int_0^1 2r^2 dr E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{BC}) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} E(\overline{AQ} | Q \in \overline{BC})$$

Es ergibt sich also:

Satz 1 *In einem $\triangle ABC$ gilt:*

$$E(\overline{AQ} | Q \in \triangle ABC) = \frac{2}{3} E(\overline{AQ} | Q \in \overline{BC})$$

(Triangle Point Picking)

Es ist also durch Projektion des zufällig innerhalb des Dreiecks liegenden Punktes auf eine Seite des Dreieck gelungen, einen zweidimensionalen Erwartungswert zu einen gewichteten eindimensionalen Erwartungswert zu vereinfachen.

3.2 Erster Reduktionsschritt

Derselbe Ansatz kann unter Zuhilfenahme einer Fallunterscheidung auch für den Abstand zweier zufälliger Punkte in einem beliebigen Dreieck verwendet werden (siehe Abbildung 2).

Den gesuchten Erwartungswert bezeichnen wir nun als:

$$E_3 = E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \triangle ABC \wedge Q_2 \in \triangle ABC)$$

Wieder streben wir die Projektion einer der beiden zufälligen Punkte auf eine Dreiecksseite an, wollen aber vermeiden, dass dabei der zweite außerhalb des Dreiecks projiziert wird. Lassen wir das $\triangle ABC$ mittels Streckung mit Streckzentrum $Z = A$ um den Faktor r mit stetig kleiner werdenden r kontinuierlich schrumpfen, so trifft die Strecke $\overline{B_r C_r}$ als Bildstrecke von \overline{BC} irgendwann bei $r = r_1$ auf den Punkt Q_1 und bei $r = r_2$ auf den Punkt Q_2 .

Die Wahrscheinlichkeit für Q_1 , innerhalb von $\triangle AB_r C_r$ zu liegen, beträgt $F_1(r) = r^{d_1}$, wobei d_1 der Dimensionsgrad der Punktmenge ist, in der Q_1 liegt. Somit beträgt die Dichtefunktion, die das Ereignis $Q_1 \in \overline{B_r C_r}$ beschreibt, $f_1(r) = F_1'(r) = d_1 r^{d_1-1}$. Analog ist $F_2(r) = r^{d_2}$ und $f_2(r) = F_2'(r) = d_2 r^{d_2-1}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Punkte Q_1 und Q_2 innerhalb von $\triangle AB_r C_r$ liegen, beträgt

$$F(r) = F_1(r) F_2(r)$$

Die Dichtefunktion $f(r)$, die den Fall beschreibt, dass der äußere der beiden Punkte genau auf $\overline{B_r C_r}$ liegt, beträgt somit

$$f(r) = F'(r) = f_1(r) F_2(r) + f_2(r) F_1(r)$$

wobei $f_1(r) F_2(r)$ genau die partielle Dichte angibt, dass Q_1 auf $\overline{B_r C_r}$ und Q_2 innerhalb von $\triangle ABC$ liegt. Der Erwartungswert des Abstandes $\overline{Q_1 Q_2}$ ist in diesem Fall $E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{B_r C_r} \wedge Q_2 \in \triangle AB_r C_r)$. Analoges gilt für $f_2(r) F_1(r)$.

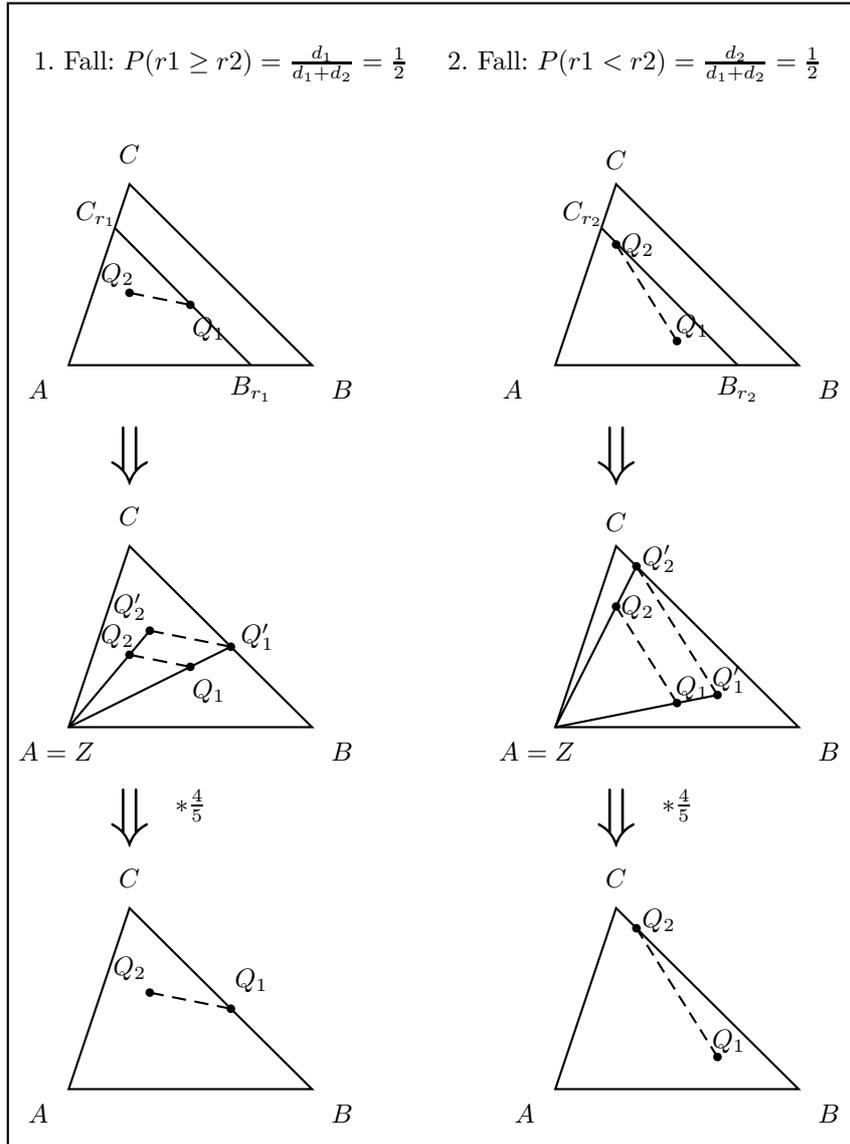


Abbildung 2: Erster Reduktionsschritt

Das Verhältniss der beiden Fälle beträgt für alle Werte von r konstant

$$\frac{f_1(r) F_2(r)}{f_2(r) F_1(r)} = \frac{d_1 r^{d_1+d_2-1}}{d_2 r^{d_1+d_2-1}} = \frac{d_1}{d_2}$$

Daraus ergibt sich

$$f_1(r) F_2(r) = \frac{d_1}{d_1 + d_2} f(r) \quad \text{und} \quad f_2(r) F_1(r) = \frac{d_2}{d_1 + d_2} f(r)$$

Wir haben also gezeigt, dass die beiden in Abbildung 2 dargestellten Fälle in ihrer Auftretenswahrscheinlichkeit von r stochastisch unabhängig sind und die gemeinsame Dichtefunktion $f(r)$ haben. Dadurch lässt sich unter Zuhilfenahme der Variablen r der Erwartungswert E_3 nun wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} E_3 &= \int_0^1 f_1(r) F_2(r) E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{B_r C_r} \wedge Q_2 \in \triangle AB_r C_r) \\ &\quad + f_2(r) F_1(r) E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \triangle AB_r C_r \wedge Q_2 \in \overline{B_r C_r}) dr \\ &= \int_0^1 \frac{d_1}{d_1 + d_2} f(r) E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{B_r C_r} \wedge Q_2 \in \triangle AB_r C_r) dr \\ &\quad + \int_0^1 \frac{d_2}{d_1 + d_2} f(r) E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \triangle AB_r C_r \wedge Q_2 \in \overline{B_r C_r}) dr \end{aligned}$$

Der Term $E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{B_r C_r} \wedge Q_2 \in \triangle AB_r C_r)$ lässt sich wiederum aufgrund folgender Überlegung umformen:

Wird das $\triangle AB_r C_r$ durch Streckung in A um den Faktor $\frac{1}{r}$ zurück auf $\triangle ABC$ projiziert, so liegt der Bildpunkt Q'_1 von Q_1 auf \overline{BC} und ist dort wiederum völlig gleichverteilt. Q'_2 liegt als Bildpunkt von Q_2 innerhalb von $\triangle ABC$ und ist dort wegen der völligen Gleichverteilung von Q_2 in $\triangle AB_r C_r$ ebenfalls völlig gleichverteilt. Es gilt weiter aufgrund der Streckung mit Faktor $\frac{1}{r}$, dass $\overline{Q'_1 Q'_2} = \frac{1}{r} \overline{Q_1 Q_2}$, unabhängig von der gegebenen Lage von Q_1 und Q_2 . Also ist

$$\begin{aligned} &E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{B_r C_r} \wedge Q_2 \in \triangle AB_r C_r) \\ &= r E(\overline{Q'_1 Q'_2} \mid Q'_1 \in \overline{BC} \wedge Q'_2 \in \triangle ABC) \\ &= r E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \triangle ABC) \end{aligned}$$

Analog ist

$$\begin{aligned} &E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \triangle AB_r C_r \wedge Q_2 \in \overline{B_r C_r}) \\ &= r E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \triangle ABC \wedge Q_2 \in \overline{BC}) \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
E_3 &= \int_0^1 \frac{d_1}{d_1 + d_2} f(r) r E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \triangle ABC) dr \\
&\quad + \int_0^1 \frac{d_1}{d_1 + d_2} f(r) r E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \triangle ABC \wedge Q_2 \in \overline{BC}) dr \\
&= \int_0^1 \frac{d_1}{d_1 + d_2} (d_1 + d_2) r^{d_1 + d_2} dr E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \triangle ABC) \\
&\quad + \int_0^1 \frac{d_2}{d_1 + d_2} (d_1 + d_2) r^{d_1 + d_2} dr E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \triangle ABC \wedge Q_2 \in \overline{BC}) \\
&= \frac{d_1}{d_1 + d_2 + 1} E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \triangle ABC) \\
&\quad + \frac{d_2}{d_1 + d_2 + 1} E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \triangle ABC \wedge Q_2 \in \overline{BC}) \tag{1}
\end{aligned}$$

Konkretes Einsetzen von $d_1 = d_2 = 2$ ergibt:

$$\begin{aligned}
E_3 &= E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \triangle ABC \wedge Q_2 \in \triangle ABC) \\
&= \frac{2}{5} E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \triangle ABC) \\
&\quad + \frac{2}{5} E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \triangle ABC \wedge Q_2 \in \overline{BC}) \\
&= \frac{4}{5} E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \triangle ABC) \tag{2}
\end{aligned}$$

Somit haben wir den ursprünglichen, 4-dimensionalen Erwartungswert auf einen gewichteten 3-dimensionalen reduziert.

3.3 Die weiteren Reduktionsschritte

Um die Darstellung der weiteren Schritte abzukürzen, wollen wir die obige Herleitung verallgemeinern.

Wir haben also zwei (nicht notwendigerweiser identische) konvexe Punktmen- gen M_1 (der Dimension d_1) und M_2 (der Dimension d_2), in denen Q_1 bzw. Q_2 zufällig gleichverteilt liegen, und wählen einen gemeinsamen Punkt $Z \in M_1 \cap M_2$ als Zentrum der Streckung mit Streckfaktor r mit $r < 1$, die zu den von r abhängigen Bildmengen M_{1r} und M_{2r} führt. Dadurch werden gleichzeitig die randständigen Projektionsmengen ρM_1 und ρM_2 festgelegt, die wir nun folgen- dermaßen definieren: $\rho M = \lim_{r \rightarrow 1} (M \setminus M_r)$. Weiter seien ρM_{1r} bzw. ρM_{2r} die Abbildung der Projektionsmengen ρM_1 und ρM_2 bei der Streckung in Z mit Faktor r (also im obigen Beispiel $\overline{B_r C_r}$).

Wie wir oben gesehen haben, fließt in die Umformung des Erwartungswertes außer dem Dimensionsgrad d_1 und d_2 nur die Bedingung ein, dass bei $Q_1 \in \rho M_{1r}$

bzw. $Q_2 \in \rho M_{2r}$ die Punkte Q_1 und Q_2 in ρM_{1r} bzw. ρM_{2r} gleichverteilt sind. Dies ist immer der Fall, wenn ρM_1 und ρM_2 jeweils auch konvexe Punktmenge sind, wie wir im Folgenden erläutern wollen.

Gemäß dem Konstruktionsvorgang stellt ρM_1 einen Teil des Randes von M_1 dar. Daher ist ρM_1 eine Punktmenge der Dimension $d_1 - 1$ und kann nicht in die d_1 -dimensionale Menge M_1 hinein gekrümmt sein, das dies der Voraussetzung widerspräche, dass ρM_1 konvex ist.

Somit stellt ρM_1 eine bezüglich der Dimension d_1 völlig ebene "Grundfläche" der Dimension $d_1 - 1$ dar. Für jedes $r < 1$ ist ρM_{1r} daher eine ebene Schnittfläche durch M_1 . Lässt man r schrittweise in gleichmäßigen Schritten kleiner werden, so unterteilen diese Schnittflächen die ursprüngliche Punktmenge M_1 in gleichmäßig dicke Schichten, die beim Übergang zu Schichten der Dicke 0 die Gleichverteilung im Volumen exakt in die Gleichverteilung in der Fläche jeden Schnittes überführen, was zu zeigen war. Somit ist unter der Bedingung der Konvexität von ρM_1 und ρM_2 die Beziehung (1) anwendbar. Dies bedeutet konkret, dass die folgende Formel für einfache Strecken, Dreiecke und in der dritten Dimension für Kegel, Pyramiden und ähnliche Körper anwendbar ist. Es gilt somit:

Satz 2 Seien M_1 und M_2 konvexe Punktmenge der Dimension d_1 und d_2 . Falls sich ein Punkt $Z \in M_1 \cap M_2$ finden lässt, der als Zentrum einer Streckung mit Streckfaktor $r < 1$ die Mengen M_1 und M_2 auf M_{1r} bzw. M_{2r} so abbildet, dass $\rho M_1 := \lim_{r \rightarrow 1} (M_1 \setminus M_{1r})$ und $\rho M_2 := \lim_{r \rightarrow 1} (M_2 \setminus M_{2r})$ ebenfalls konvexe Punktmenge sind, so gilt:

$$\begin{aligned} E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in M_1 \wedge Q_2 \in M_2) \\ &= \frac{d_1}{d_1 + d_2 + 1} E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \rho M_1 \wedge Q_2 \in M_2) \\ &\quad + \frac{d_2}{d_1 + d_2 + 1} E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in M_1 \wedge Q_2 \in \rho M_2) \end{aligned}$$

(Basissatz der Projektiven Reduktion)

Dabei setzt sich der erste Gewichtungsfaktor $\frac{d_1}{d_1 + d_2 + 1}$ aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{d_1}{d_1 + d_2}$ für das Auftreten der ersten Projektionsmöglichkeit und dem eigentlichen Korrekturfaktor $\frac{d_1 + d_2}{d_1 + d_2 + 1}$ zusammen. Analoges gilt für den zweiten Gewichtungsfaktor.

Satz 2 wird nun auf das bisherige Zwischenergebnis (Gleichung 2) angewandt. Es gilt $Q_1 \in \overline{BC} = M_1$ mit $d_1 = 1$ und $Q_2 \in \triangle ABC = M_2$ mit $d_2 = 2$. Wählt man jetzt als Streckzentrum $Z = B$ aus, so ist $\rho M_1 = C$ und $\rho M_2 = \overline{AC}$.

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{4}{5} E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \triangle ABC) \\ &= \frac{4}{5} \left(\frac{1}{4} E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 = C \wedge Q_2 \in \triangle ABC) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{4} E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \overline{AC}) \\
= & \frac{1}{5} E(\overline{CQ} | Q \in \triangle ABC) \\
& + \frac{2}{5} E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \overline{AC})
\end{aligned}$$

Der erste Term ist das oben diskutierte Triangle Point Picking und ergibt nach Satz 1:

$$\frac{1}{5} E(\overline{CQ} | Q \in \triangle ABC) = \frac{1}{5} \frac{2}{3} E(\overline{CQ} | Q \in \overline{AB})$$

Für den zweiten Term ergibt sich mit $Q_1 \in \overline{BC} = M_1$ ($d_1 = 1$) und $Q_2 \in \overline{AC} = M_2$ ($d_2 = 1$) als einzig mögliches Streckzentrum $Z = C$, dass $\rho M_1 = B$ und $\rho M_2 = A$. Somit ist

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{5} E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \overline{AC}) \\
= & \frac{2}{5} \frac{1}{3} E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 = B \wedge Q_2 \in \overline{AC}) + \frac{2}{5} \frac{1}{3} E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 = A) \\
= & \frac{2}{5} \frac{1}{3} E(\overline{BQ} | Q \in \overline{AC}) + \frac{2}{5} \frac{1}{3} E(\overline{AQ} | Q \in \overline{BC})
\end{aligned}$$

Zusammenfassend ist also

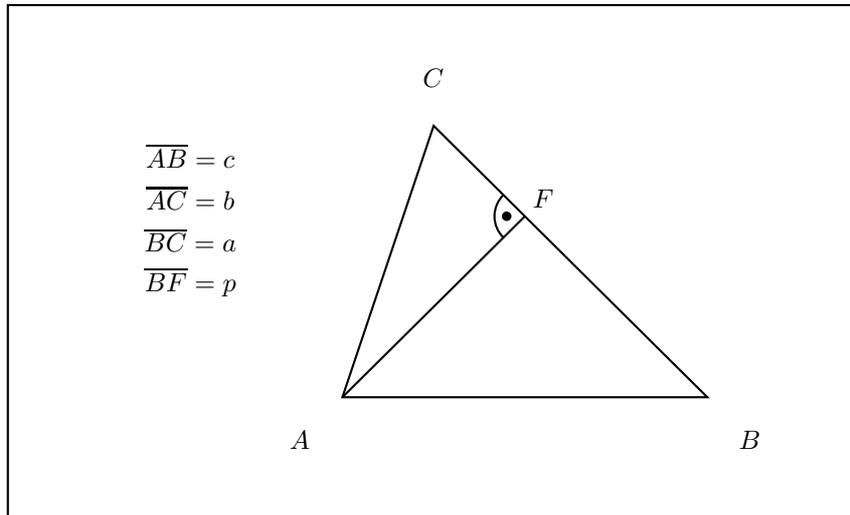
$$E_3 = \frac{2}{15} \left(E(\overline{AQ} | Q \in \overline{BC}) + E(\overline{BQ} | Q \in \overline{AC}) + E(\overline{CQ} | Q \in \overline{AB}) \right) \quad (3)$$

Der mittlere Abstand zweier Punkte in einem beliebigen Dreieck entspricht also $\frac{2}{15}$ der Summe der mittleren Abstände eines Punkte auf einer der drei Dreiecksseiten zur jeweils gegenüberliegenden Seite. Die zusammenfassende schematische Darstellung dieser Herleitung ist in Abbildung 4 zu sehen.

3.4 Die konkrete Berechnung des Erwartungswertes

Die verbleibenden drei Erwartungswerte, die eindimensionalen Integralen entsprechen, sind nun einfach zu berechnen. Für $E_2 = E(\overline{AQ} | Q \in \overline{BC})$ ergibt sich nach Abbildung 3 mit vorzeichenbehaftetem p (negativ, falls $B \in \overline{FC}$):

$$\begin{aligned}
E_2 & = \int_{-p}^{a-p} \frac{1}{a} \sqrt{c^2 - p^2 + x^2} dx \\
& = \frac{1}{2a} \left(cp + (a-p) \sqrt{a^2 + c^2 - 2ap} \right. \\
& \quad \left. + (c^2 - p^2) (\ln(a-p + \sqrt{a^2 + c^2 - 2ap}) - \ln(c-p)) \right)
\end{aligned}$$

Abbildung 3: Skizze zur Berechnung von $E(\overline{AQ} | Q \in \overline{BC})$

Aus $c^2 - p^2 = b^2 - (a - p)^2$ ergibt sich $p = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$. Setzt man dies in den obigen Ausdruck ein, so erhält man nach längerer Umformung schließlich:

Satz 3 In einem Dreieck mit den Seiten a , b , und c beträgt der mittlere Abstand E_2 eines zufällig gewählten Punktes auf der Seite a zur gegenüberliegenden Ecke:

$$\begin{aligned} E_2(a, b, c) &= \frac{b+c}{4} + \frac{(b+c)(b-c)^2}{4a^2} \\ &+ \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \ln \frac{a+b+c}{-a+b+c}}{8a^3} \end{aligned}$$

(Point To Line Picking)

Das Einsetzen in Gleichung (3) ergibt somit folgenden Satz:

Satz 4 Der mittlere Abstand E_3 zweier zufällig gewählter Punkte in einem Dreieck mit den Seitenlängen a , b und c beträgt:

$$E_3(a, b, c) = \frac{a+b+c}{15} + \frac{(b+c)(b-c)^2}{30a^2} + \frac{(a+c)(a-c)^2}{30b^2} + \frac{(a+b)(a-b)^2}{30c^2} \\ + \frac{1}{60}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \\ \left(\frac{\ln \frac{a+b+c}{-a+b+c}}{a^3} + \frac{\ln \frac{a+b+c}{a-b+c}}{b^3} + \frac{\ln \frac{a+b+c}{a+b-c}}{c^3} \right)$$

(Triangle Line Picking)

Beispiele

Für die Sonderfälle, das gleichseitige Dreieck und das gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck, ergeben sich beim Einsetzen in die allgemeine Formel die bereits bekannten Werte:

$$E_3(1, 1, 1) = \frac{1}{20}(4 + 3 \ln 3) \approx 0.364791843 \dots$$

$$E_3(1, 1, \sqrt{2}) = \frac{1}{30}(2 + 4\sqrt{2} + (4 + \sqrt{2}) \ln(1 + \sqrt{2})) \approx 0.414293302 \dots$$

Es sind aber die mittleren Abstände in allen beliebigen Dreiecken berechenbar. Das kleinste pythagoräische Dreieck ergibt etwa:

$$E_3(3, 4, 5) = \frac{20460 + 9728 \ln 2 + 5103 \ln 3}{22500} \approx 1.458184635 \dots$$

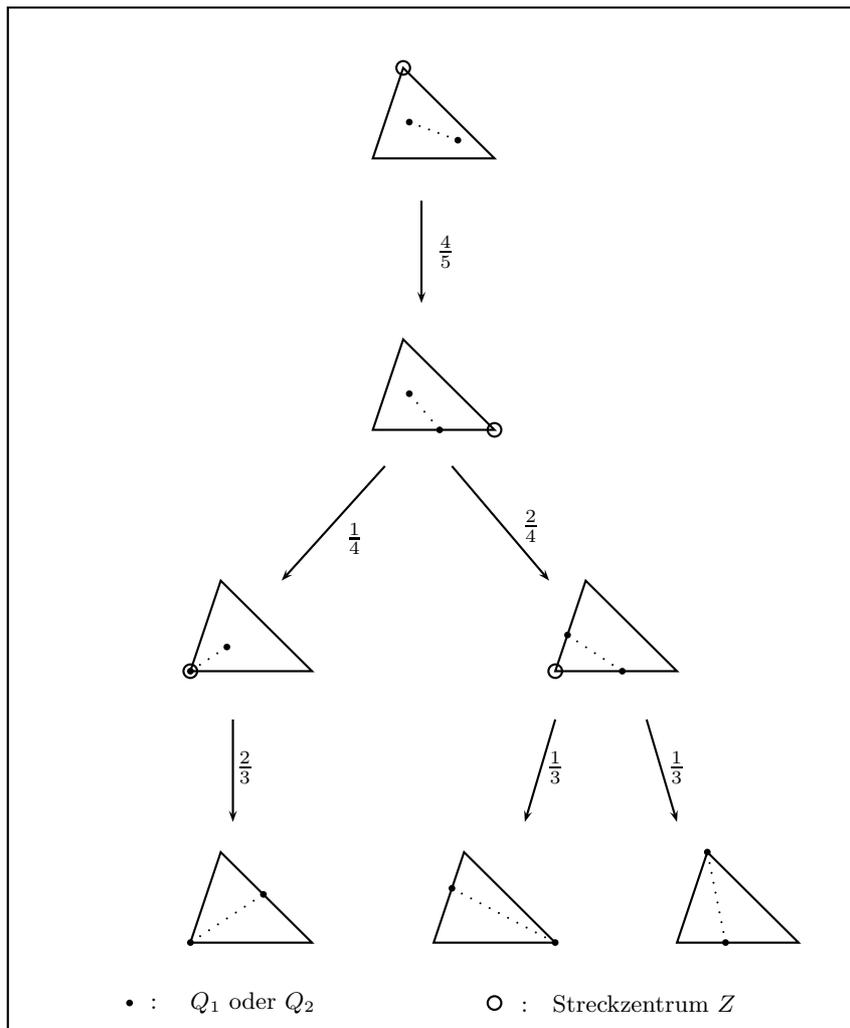


Abbildung 4: Reduktionsschritte beim Dreieck

4 Der mittlere Abstand der Punkte eines konvexen Polygons

Nun wollen wir die obigen Ergebnisse allgemein auf konvexe Polygone in der Ebene anwenden. Da der mittlere Abstand zweier Punkte im Quadrat bereits bekannt ist, wenden wir uns gleich höheren Polygonen zu. Wieder verwenden wir Linien und Dreiecke als Grundmengen der Vereinfachungsschritte, zusätzlich muss bei jedem Schritt jedoch eine Gewichtung der einzelnen Dreiecke entsprechend ihres Flächenanteils erfolgen, da dies die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der die Punkte Q_1 und Q_2 in ihnen zu liegen kommen.

4.1 Das reguläre Fünfeck

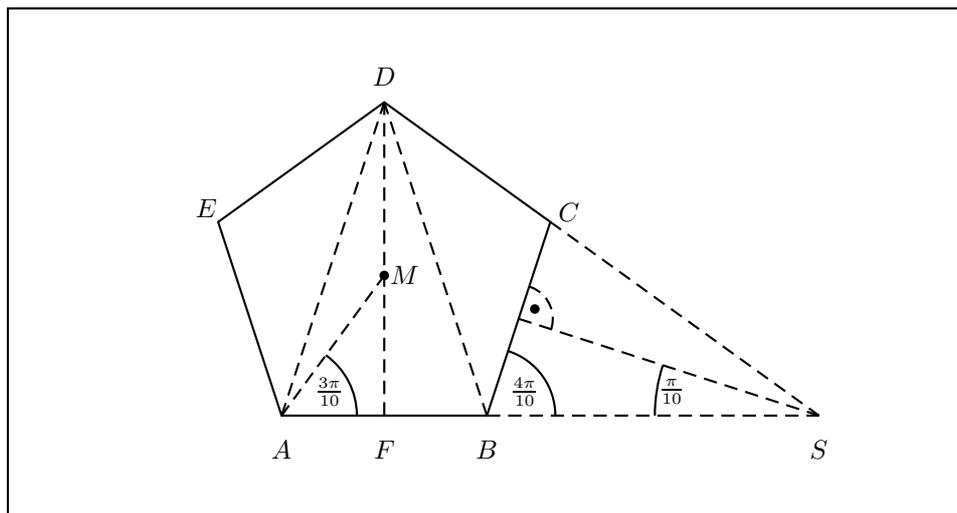


Abbildung 5: Das reguläre Fünfeck

Wir fangen mit dem Abstand zweier Punkte im regulärem Fünfeck mit Seitenlänge 1 an (siehe Abbildung 5). Dazu wird die Wahrscheinlichkeit p , mit der ein zufällig gewählter Punkt im $\triangle ABD$ liegt, benötigt. Diese ergibt sich wie folgt aus den entsprechenden Flächenverhältnissen:

$$p = \frac{A(\triangle ABD)}{5 * A(\triangle ABM)} = \frac{\overline{DF}}{5\overline{FM}} = \frac{\tan \frac{4\pi}{10}}{5 \tan \frac{3\pi}{10}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

Weiter benötigen wir die Länge der Diagonalen d :

$$d = \overline{AD} = \overline{BS} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Nun wird wie beim einfachen Dreieck mehrfach nacheinander der Hauptsatz der Projektiven Reduktion auf den gesuchten Erwartungswert angewendet (sie-

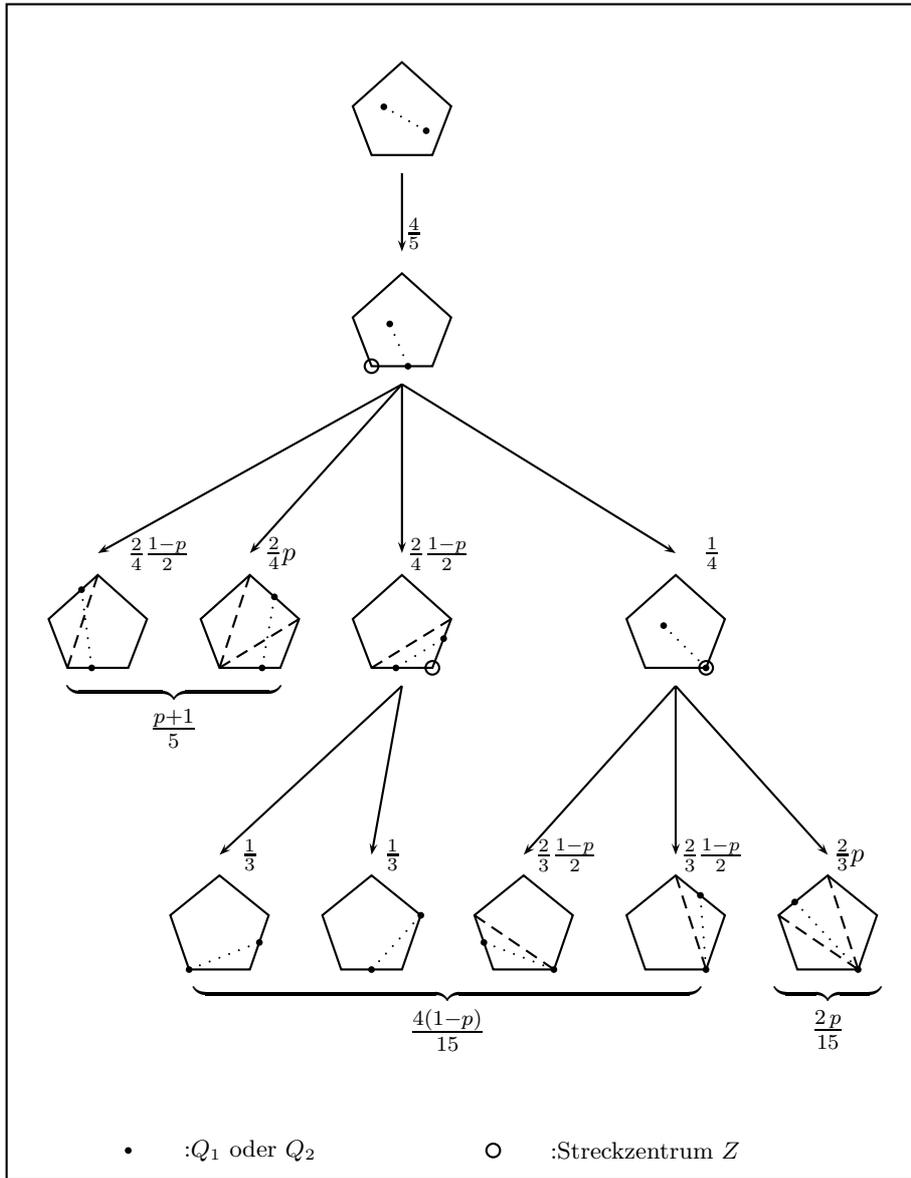


Abbildung 6: Die Reduktionsschritte beim regelmäßigen Fünfeck

he Abbildung 6). Dabei wird vom gewählten Streckzentrum Z aus das Fünfeck durch die entsprechenden Diagonalen in 3 Dreiecke unterteilt, für die der Hauptsatz jeweils gesondert unter Berücksichtigung ihres Flächenanteils angewendet werden muss. Äquivalente Erwartungswerte werden zwischenzeitlich jeweils zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
E_5 &= E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \widehat{ABCDE} \wedge Q_2 \in \widehat{ABCDE}) \\
&\stackrel{(Z=E)}{=} \frac{2}{5} \left(\frac{1-p}{2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \widehat{ABCDE}) \right. \\
&\quad + p E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \widehat{ABCDE}) \\
&\quad \left. + \frac{1-p}{2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{CD} \wedge Q_2 \in \widehat{ABCDE}) \right) \\
&\quad + \frac{2}{5} \left(\frac{1-p}{2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \widehat{ABCDE} \wedge Q_2 \in \overline{AB}) \right. \\
&\quad + p E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \widehat{ABCDE} \wedge Q_2 \in \overline{BC}) \\
&\quad \left. + \frac{1-p}{2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \widehat{ABCDE} \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \right) \\
&= \frac{4}{5} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \widehat{ABCDE}) \\
&\stackrel{(Z=A)}{=} \frac{4}{5} \frac{1}{4} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 = B \wedge Q_2 \in \widehat{ABCDE}) \\
&\quad + \frac{4}{5} \frac{2}{4} \left(\frac{1-p}{2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{BC}) \right. \\
&\quad + p E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\
&\quad \left. + \frac{1-p}{2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{DE}) \right) \\
&= \frac{1}{5} E(\overline{BQ} \mid Q \in \widehat{ABCDE}) \\
&\quad + \frac{1-p}{5} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{BC}) \\
&\quad + \frac{1+p}{5} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\
&\stackrel{(Z=B)}{=} \frac{1}{5} \frac{2}{3} \left(\frac{1-p}{2} E(\overline{BQ} \mid Q \in \overline{CD}) + p E(\overline{BQ} \mid Q \in \overline{DE}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1-p}{2} E(\overline{BQ} \mid Q \in \overline{AE}) \right) \\
&\quad + \frac{1-p}{5} \frac{1}{3} \left(E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{BC}) + E(\overline{CQ} \mid Q \in \overline{AB}) \right) \\
&\quad + \frac{1+p}{5} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CD})
\end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich:

$$\begin{aligned}
E_5 &= E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \widehat{ABCDE} \wedge Q_2 \in \widehat{ABCDE}) \\
&= \frac{4}{15} (1-p) E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{BC}) + \frac{2}{15} p E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{CD}) \\
&\quad + \frac{1}{5} (p+1) E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CD})
\end{aligned}$$

Die ersten beiden Erwartungswerte sind nach Satz 3 bekannt. Der letzte Term kann so aber zunächst nicht berechnet und auch nicht direkt mittels Projektiver Reduktion weiter vereinfacht werden, da kein gemeinsames Streckzentrum existiert. Hier behelfen wir uns elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Betrachten wir in der Abbildung 7 das Dreieck $\triangle ASD$, auf dessen Seiten \overline{AS} und \overline{DS} jeweils die Punkte Q_1 und Q_2 zufällig gewählt werden. Die Wahrscheinlichkeit, in einem bestimmten Streckenabschnitt zu liegen, entspricht genau der Länge dieses Abschnittes in Bezug auf die Gesamtseitenlänge. Es sei $p_1 = \frac{\overline{BS}}{\overline{AS}}$ und $p_2 = \frac{\overline{CS}}{\overline{DS}}$. Hierdurch ergibt sich:

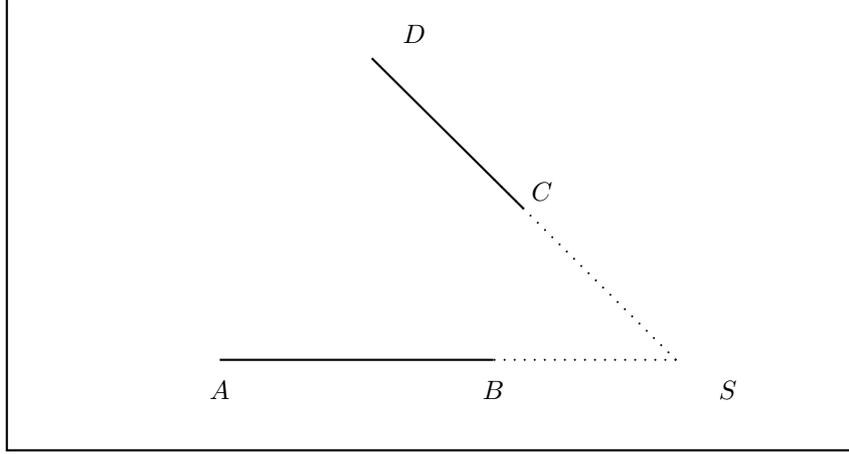


Abbildung 7: Erwartungswert bei nicht parallelen Strecken

$$\begin{aligned}
& E(\overline{Q_1Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AS} \wedge Q_2 \in \overline{DS}) \\
&= (1-p_1)(1-p_2)E(\overline{Q_1Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\
&\quad + p_1(1-p_2)E(\overline{Q_1Q_2} \mid Q_1 \in \overline{BS} \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\
&\quad + p_2(1-p_1)E(\overline{Q_1Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CS}) \\
&\quad + p_1p_2E(\overline{Q_1Q_2} \mid Q_1 \in \overline{BS} \wedge Q_2 \in \overline{CS})
\end{aligned}$$

Es gilt weiter

$$\begin{aligned}
& (1-p_2)E(\overline{Q_1Q_2} \mid Q_1 \in \overline{BS} \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\
&= E(\overline{Q_1Q_2} \mid Q_1 \in \overline{BS} \wedge Q_2 \in \overline{DS}) \\
&\quad - p_2E(\overline{Q_1Q_2} \mid Q_1 \in \overline{BS} \wedge Q_2 \in \overline{CS})
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
& (1-p_1)E(\overline{Q_1Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CS}) \\
&= E(\overline{Q_1Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AS} \wedge Q_2 \in \overline{CS}) \\
&\quad - p_1E(\overline{Q_1Q_2} \mid Q_1 \in \overline{BS} \wedge Q_2 \in \overline{CS})
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
& E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AS} \wedge Q_2 \in \overline{DS}) \\
&= (1-p_1)(1-p_2)E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\
&\quad + p_1 E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{BS} \wedge Q_2 \in \overline{DS}) \\
&\quad + p_2 E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AS} \wedge Q_2 \in \overline{CS}) \\
&\quad - p_1 p_2 E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{BS} \wedge Q_2 \in \overline{CS})
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
& (1-p_1)(1-p_2)E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\
&= E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AS} \wedge Q_2 \in \overline{DS}) \\
&\quad - p_1 E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{BS} \wedge Q_2 \in \overline{DS}) \\
&\quad - p_2 E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AS} \wedge Q_2 \in \overline{CS}) \\
&\quad + p_1 p_2 E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{BS} \wedge Q_2 \in \overline{CS})
\end{aligned}$$

Die Erwartungswerte auf der rechten Seite der Gleichung lassen sich mittels Wahl von S als Streckzentrum nach dem Basissatz der Projektiven Reduktion umformen:

$$\begin{aligned}
& (1-p_1)(1-p_2)E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\
&= \frac{1}{3}E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{DS}) + \frac{1}{3}E(\overline{DQ} \mid Q \in \overline{AS}) \\
&\quad - \frac{1}{3}p_1 E(\overline{BQ} \mid Q \in \overline{DS}) - \frac{1}{3}p_1 E(\overline{DQ} \mid Q \in \overline{BS}) \\
&\quad - \frac{1}{3}p_2 E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{CS}) - \frac{1}{3}p_2 E(\overline{CQ} \mid Q \in \overline{AS}) \\
&\quad + \frac{1}{3}p_1 p_2 E(\overline{BQ} \mid Q \in \overline{CS}) + \frac{1}{3}p_1 p_2 E(\overline{CQ} \mid Q \in \overline{BS})
\end{aligned}$$

Nun lassen sich letztendlich auch die Erwartungswerte über die Seiten \overline{AS} und \overline{DS} in gewichtete Erwartungswerte über \overline{AB} und \overline{BS} bzw. \overline{CD} und \overline{CS} aufteilen:

$$\begin{aligned}
& (1-p_1)(1-p_2)E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\
&= ((1-p_2)\frac{1}{3}E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{DC}) + p_2\frac{1}{3}E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{CS})) \\
&\quad + ((1-p_1)\frac{1}{3}E(\overline{DQ} \mid Q \in \overline{AB}) + p_1\frac{1}{3}E(\overline{DQ} \mid Q \in \overline{BS})) \\
&\quad + (- (1-p_2)\frac{1}{3}p_1 E(\overline{BQ} \mid Q \in \overline{CD}) - p_2\frac{1}{3}p_1 E(\overline{BQ} \mid Q \in \overline{CS})) \\
&\quad - \frac{1}{3}p_1 E(\overline{DQ} \mid Q \in \overline{BS}) - \frac{1}{3}p_2 E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{CS}) \\
&\quad + (- (1-p_1)\frac{1}{3}p_2 E(\overline{CQ} \mid Q \in \overline{AB}) - p_1\frac{1}{3}p_2 E(\overline{CQ} \mid Q \in \overline{BS})) \\
&\quad + \frac{1}{3}p_1 p_2 E(\overline{BQ} \mid Q \in \overline{CS}) + \frac{1}{3}p_1 p_2 E(\overline{CQ} \mid Q \in \overline{BS})
\end{aligned}$$

Da sich acht der einzelnen Terme nun gegenseitig aufheben, erhält man schlussendlich

$$\begin{aligned} & E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\ &= \frac{1}{3(1-p_1)} E(\overline{AQ} | Q \in \overline{DC}) + \frac{1}{3(1-p_2)} E(\overline{DQ} | Q \in \overline{AB}) \\ &\quad - \frac{p_1}{3(1-p_1)} E(\overline{BQ} | Q \in \overline{CD}) - \frac{p_2}{3(1-p_2)} E(\overline{CQ} | Q \in \overline{AB}) \end{aligned}$$

Setzt man nun für p_1 und p_2 die Streckenverhältnisse wieder ein, so erhält man:

Satz 5 *Wählt man zufällig zwei Punkte auf zwei nicht parallelen Strecken \overline{AB} und \overline{CD} , deren Verlängerungen sich in einem Punkt S schneiden mit $B \in \overline{AS}$ und $C \in \overline{DS}$, so beträgt der mittlere Abstand dieser Punkte*

$$\begin{aligned} & E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\ &= \frac{\overline{AS}}{3\overline{AB}} E(\overline{AQ} | Q \in \overline{DC}) + \frac{\overline{DS}}{3\overline{CD}} E(\overline{DQ} | Q \in \overline{AB}) \\ &\quad - \frac{\overline{BS}}{3\overline{AB}} E(\overline{BQ} | Q \in \overline{CD}) - \frac{\overline{CS}}{3\overline{CD}} E(\overline{CQ} | Q \in \overline{AB}) \end{aligned}$$

(line to line picking 1)

Nun setzen wir die Werte für die entsprechenden Strecken im Fünfeck ein und erhalten:

$$\begin{aligned} & E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\ &= \frac{d+1}{3} E(\overline{AQ} | Q \in \overline{DC}) + \frac{d+1}{3} E(\overline{DQ} | Q \in \overline{AB}) \\ &\quad - \frac{d}{3} E(\overline{BQ} | Q \in \overline{CD}) - \frac{d}{3} E(\overline{CQ} | Q \in \overline{AB}) \end{aligned}$$

Setzt man dies Ergebnis in den ursprünglichen Ausdruck ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} E_5 &= \frac{4}{15}(1-p)E(\overline{AQ} | Q \in \overline{BC}) + \frac{2}{15}pE(\overline{AQ} | Q \in \overline{CD}) \\ &\quad + \frac{1}{15}(p+1)(d+1)E(\overline{AQ} | Q \in \overline{DC}) \\ &\quad + \frac{1}{15}(p+1)(d+1)E(\overline{DQ} | Q \in \overline{AB}) \\ &\quad - \frac{1}{15}(p+1)dE(\overline{BQ} | Q \in \overline{CD}) - \frac{1}{15}(p+1)dE(\overline{CQ} | Q \in \overline{AB}) \end{aligned}$$

Jeweils drei Erwartungswerte sind äquivalent und lassen sich zusammenfassen:

$$\begin{aligned} E_5 &= \frac{2}{15}(2(1-p) - d(p+1))E(\overline{AQ} | Q \in \overline{BC}) \\ &\quad + \frac{2}{15}(p + (p+1)(d+1))E(\overline{AQ} | Q \in \overline{CD}) \end{aligned}$$

Mit Einsetzen von $p = \sqrt{\frac{1}{5}}$ und $d = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ergibt sich weiter nach Satz 3:

$$\begin{aligned}
E_5 &= \frac{2}{15}(\sqrt{5}+2)E(\overline{AQ} | Q \in \overline{CD}) - \frac{2}{15}(\sqrt{5}-1)E(\overline{AQ} | Q \in \overline{BC}) \\
&= \frac{2}{15}(\sqrt{5}+2)E_2\left(1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) - \frac{2}{15}(\sqrt{5}-1)E_2\left(1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, 1\right) \\
&= \frac{1}{120}((18\sqrt{5}+40)\ln(\sqrt{5}+2) - (11\sqrt{5}+20)\ln(5) + 4\sqrt{5}+28) \\
&\approx 0.675160011193203\dots
\end{aligned}$$

Normalisiert man das reguläre Fünfeck auf eine Fläche von 1, so ist $E_{5N} \approx 0.51473325292936\dots$

4.2 Das reguläre Sechseck

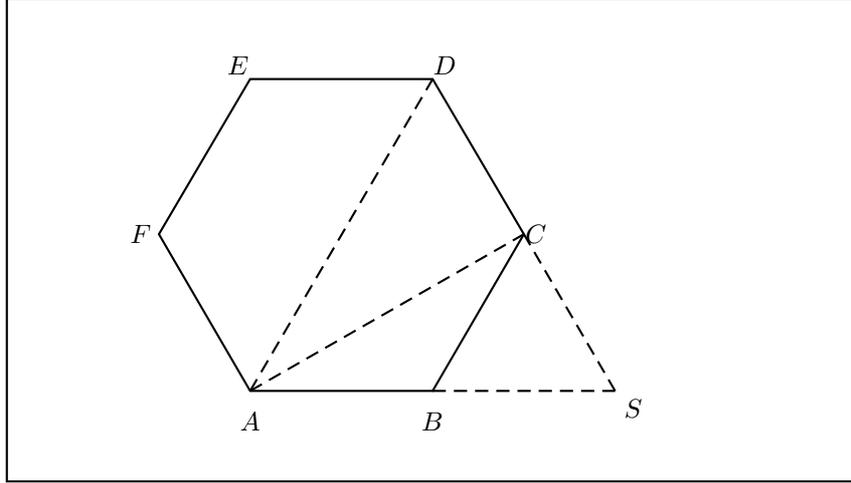


Abbildung 8: Das reguläre Sechseck

Unter Einbezug der Tatsache, dass $\triangle ABC$ $\frac{1}{6}$ und $\triangle ACD$ $\frac{1}{3}$ der Fläche des Sechsecks einnimmt, ergibt sich folgende Umformung:

$$\begin{aligned}
E_6 &= E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \widehat{ABCDEF} \wedge Q_2 \in \widehat{ABCDEF}) \\
&\stackrel{(Z=F)}{=} \frac{2}{5} \left(\frac{1}{6} E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \widehat{ABCDEF}) \right. \\
&\quad + \frac{1}{3} E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \widehat{ABCDEF}) \\
&\quad + \frac{1}{3} E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{CD} \wedge Q_2 \in \widehat{ABCDEF}) \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{DE} \wedge Q_2 \in \widehat{ABCDEF}) \right) \\
&\quad + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{6} E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \widehat{ABCDEF} \wedge Q_2 \in \overline{AB}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{3}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \widehat{ABCDEF}) \wedge Q_2 \in \overline{BC}) \\
& +\frac{1}{3}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \widehat{ABCDEF}) \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\
& +\frac{1}{6}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \widehat{ABCDEF}) \wedge Q_2 \in \overline{DE})) \\
= & \frac{4}{5}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \widehat{ABCDEF}) \\
\stackrel{(Z=A)}{=} & \frac{4}{5} \frac{1}{4}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 = B \wedge Q_2 \in \widehat{ABCDEF}) \\
& +\frac{4}{5} \frac{2}{4} \left(\frac{1}{6}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{BC}) \right. \\
& \quad +\frac{1}{3}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\
& \quad +\frac{1}{3}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{DE}) \\
& \quad \left. +\frac{1}{6}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{EF}) \right) \\
= & \frac{1}{5}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 = B \wedge Q_2 \in \widehat{ABCDEF}) \\
& +\frac{1}{15}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{BC}) \\
& +\frac{1}{5}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\
& +\frac{2}{15}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{DE}) \\
\stackrel{(Z=B)}{=} & \frac{1}{5} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 = B \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \right. \\
& \quad \left. +\frac{2}{3}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 = B \wedge Q_2 \in \overline{DE}) \right) \\
& +\frac{1}{15} \frac{1}{3} \left(E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 = A \wedge Q_2 \in \overline{BC}) \right. \\
& \quad \left. +E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 = C) \right) \\
& +\frac{1}{5}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\
& +\frac{2}{15}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{DE}) \\
\stackrel{(\text{Satz5})}{=} & \frac{4}{45}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 = A \wedge Q_2 \in \overline{BC}) \\
& +\frac{4}{45}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 = A \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\
& +\frac{1}{5} \left(\frac{4}{3}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 = A \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \right. \\
& \quad \left. -\frac{2}{3}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 = A \wedge Q_2 \in \overline{BC}) \right) \\
& +\frac{2}{15}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{DE}) \\
= & \frac{16}{45}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 = A \wedge Q_2 \in \overline{CD})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{45}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 = A \wedge Q_2 \in \overline{BC}) \\
& +\frac{2}{15}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{DE}) \\
\stackrel{(\text{Satz 3})}{=} & \frac{16}{45}E_2(1, 2, \sqrt{3}) - \frac{2}{45}E_2(1, \sqrt{3}, 1) \\
& +\frac{2}{15}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{DE})
\end{aligned}$$

Für $E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{DE})$ ist Satz 5 wegen $AB \parallel DE$ nicht anwendbar, allerdings ist eben wegen dieser Parallelität das sich ergebende zweidimensionale Integral ohne größere Probleme zu berechnen. Nehmen wir den allgemeinen Fall in Abbildung 9, so ergibt sich: Im Trapez $ABCD$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ und obigen

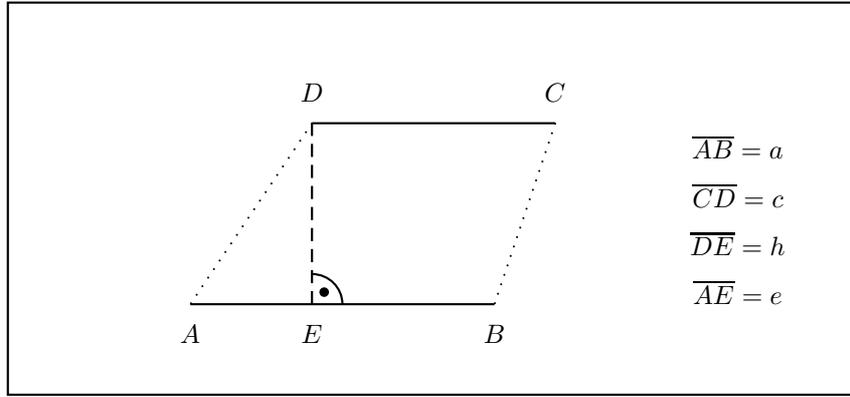


Abbildung 9: Erwartungswert bei parallelen Strecken

Streckenbezeichnungen gilt für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
& E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\
& = \int_0^c \int_{-e}^{a-e} \frac{\sqrt{(x-y)^2 + h^2}}{ac} dx dy \\
& = \int_0^c \frac{1}{2ac} \left(h^2 \operatorname{arsinh} \frac{y+e}{h} - h^2 \operatorname{arsinh} \frac{y+e-a}{h} \right. \\
& \quad \left. + (y+e) \sqrt{h^2 + (y+e)^2} \right. \\
& \quad \left. - (y+e-a) \sqrt{h^2 + (y+e-a)^2} \right) dy \\
& = \frac{1}{6ac} \left(3h^2 \left((c+e) \operatorname{arsinh} \frac{c+e}{h} - e \operatorname{arsinh} \frac{e}{h} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (c+e-a) \operatorname{arsinh} \frac{c+e-a}{h} + (e-a) \operatorname{arsinh} \frac{e-a}{h} \right) \right. \\
& \quad \left. - (3h^2 - (h^2 + (c+e)^2)) \sqrt{h^2 + (c+e)^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (3h^2 - (h^2 + (c + e - a)^2))\sqrt{h^2 + (c + e - a)^2} \\
& + (3h^2 - (h^2 + e^2))\sqrt{h^2 + e^2} \\
& - (3h^2 - (h^2 + (e - a)^2))\sqrt{h^2 + (e - a)^2}
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen der entsprechenden Seiten- bzw. Diagonalenstrecken erhält man somit

Satz 6 *Der mittlere Abstand zweier zufällig gewählter Punkte auf zwei parallelen Strecken \overline{AB} und \overline{CD} beträgt*

$$\begin{aligned}
& E(\overline{Q_1Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\
& = \frac{h^2}{2 \overline{ABCD}} \left(\sqrt{\overline{AC}^2 - h^2} \operatorname{arcsinh} \frac{\sqrt{\overline{AC}^2 - h^2}}{h} - \overline{AC} \right. \\
& \quad + \sqrt{\overline{BD}^2 - h^2} \operatorname{arcsinh} \frac{\sqrt{\overline{BD}^2 - h^2}}{h} - \overline{BD} \\
& \quad - \sqrt{\overline{AD}^2 - h^2} \operatorname{arcsinh} \frac{\sqrt{\overline{AD}^2 - h^2}}{h} + \overline{AD} \\
& \quad \left. - \sqrt{\overline{BC}^2 - h^2} \operatorname{arcsinh} \frac{\sqrt{\overline{BC}^2 - h^2}}{h} + \overline{BC} \right) \\
& \quad + \frac{\overline{AC}^3 + \overline{BD}^3 - \overline{AD}^3 - \overline{BC}^3}{6 \overline{ABCD}}
\end{aligned}$$

wobei h der Abstand der Geraden AB und CD ist.

(line-to-line picking 2)

Setzt man die entsprechenden Streckenlängen ein, so ergibt sich aus Gleichung (4):

$$\begin{aligned}
E_6 & = \frac{16}{45} \left(\frac{3 \ln(3)}{4} + 1 \right) - \frac{2}{45} \frac{6 \ln(\sqrt{3} + 2) - 3 \ln(3) + 12\sqrt{3} - 4}{16} \\
& \quad + \frac{2}{15} \left(\frac{3}{2} \ln 3 + 2\sqrt{3} - \frac{10}{3} \right) \\
& = \frac{-6 \ln(\sqrt{3} + 2) + 171 \ln(3) + 84\sqrt{3} - 28}{360} \\
& \approx 0.8262589494902 \dots
\end{aligned}$$

Normalisiert man das reguläre Sechseck auf eine Fläche von 1, so ist $E_{6N} \approx 0.5126137288 \dots$

Listen wir die auf die Fläche 1 normalisierten mittleren Abstände zweier Punkte in regulären Polygonen auf, so erhalten wir als Hinweis für die recht rasche Konvergenz in Übereinstimmung mit früheren Ergebnissen:

Anzahl der Ecken k	Wert E_{kN}
3	0.5543637207...
4	0.5214054331...
5	0.5147332529...
6	0.5126137288...
∞	0.5108255918...

4.3 Unregelmäßige konvexe Polygone

Mit Hilfe der präsentierten Sätze kann prinzipiell der mittlere Abstand der Punkte jedes beliebigen konvexen Polygons berechnet werden, da sich die beiden zufälligen Punkte immer mit exakt zu berechnender Wahrscheinlichkeit auf jeweils zwei Seiten oder eine Seite und einen Eckpunkt des Polygons projizieren lassen, wodurch die Sätze 3, 5 oder 6 anwendbar sind. Allerdings steigt der Aufwand, der bei regelmäßigen Polygonen wegen der hohen Symmetrie etwa linear zunimmt, dann etwa quadratisch mit der Eckenanzahl an.

Als einfachstes Beispiel wollen wir hier den mittleren Abstand zweier Punkte eines beliebigen konvexen Vierecks ohne parallele Seiten berechnen. (siehe Abbildung 10).

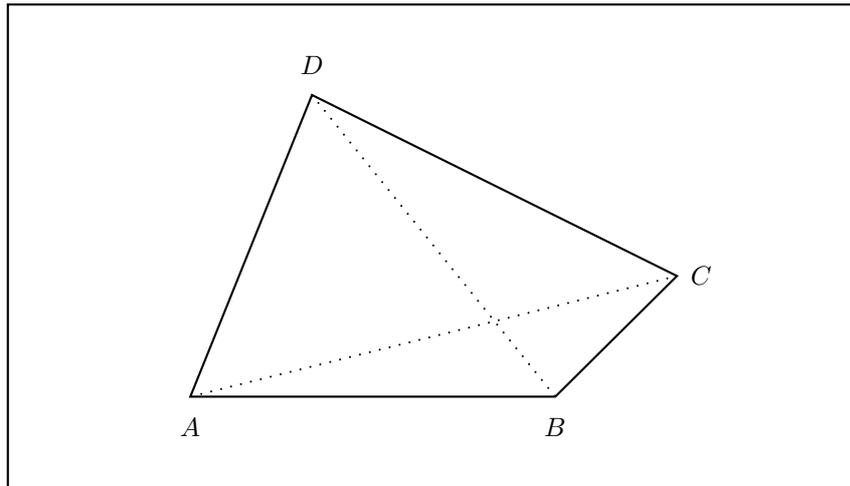


Abbildung 10: Das konvexe Viereck

Dabei benötigen wir die Flächenverhältnisse $p_1 = \frac{A(\triangle ABC)}{A(\square ABCD)}$ und $p_2 = \frac{A(\triangle ABD)}{A(\square ABCD)}$.

Es gilt nach Satz 2 (die verwendeten Streckzentren sind jeweils markiert):

$$\begin{aligned}
 & E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \square ABCD \wedge Q_2 \in \square ABCD) \\
 & \stackrel{(z=A)}{=} \frac{4}{5} p_1 E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \square ABCD) \\
 & \quad + \frac{4}{5} (1 - p_1) E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{CD} \wedge Q_2 \in \square ABCD) \\
 & \stackrel{(z=C)}{=} \frac{1}{4} \frac{4}{5} p_1 E(\overline{BQ} \mid Q \in \square ABCD)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{4} \frac{4}{5} p_1^2 E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \overline{AB}) \\
& + \frac{2}{4} \frac{4}{5} p_1(1-p_1) E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \overline{AD}) \\
& + \frac{1}{4} \frac{4}{5} (1-p_1) E(\overline{DQ} | Q \in \square ABCD) \\
& + \frac{2}{4} \frac{4}{5} (1-p_1)^2 E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{CD} \wedge Q_2 \in \overline{AD}) \\
& + \frac{2}{4} \frac{4}{5} p_1(1-p_1) E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{CD} \wedge Q_2 \in \overline{AB}) \\
\stackrel{\text{Satz 5}}{=} & \frac{1}{5} p_1 \left(\frac{2}{3} p_2 E(\overline{BQ} | Q \in \overline{AD}) + \frac{2}{3} (1-p_2) E(\overline{BQ} | Q \in \overline{CD}) \right) \\
& + \frac{2}{5} p_1^2 \left(\frac{1}{3} E(\overline{AQ} | Q \in \overline{BC}) + \frac{1}{3} E(\overline{CQ} | Q \in \overline{AB}) \right) \\
& + \frac{2}{5} p_1(1-p_1) \left(\frac{1}{3} \frac{p_1}{p_1 - (1-p_2)} E(\overline{AQ} | Q \in \overline{BC}) \right. \\
& \quad + \frac{1}{3} \frac{p_2}{p_2 - (1-p_1)} E(\overline{BQ} | Q \in \overline{AD}) \\
& \quad + \frac{1}{3} \frac{1-p_1}{(1-p_1) - p_2} E(\overline{CQ} | Q \in \overline{AD}) \\
& \quad \left. + \frac{1}{3} \frac{1-p_2}{(1-p_2) - p_1} E(\overline{DQ} | Q \in \overline{BC}) \right) \\
& + \frac{1}{5} (1-p_1) \left(\frac{2}{3} p_2 E(\overline{DQ} | Q \in \overline{AB}) + \frac{2}{3} (1-p_2) E(\overline{DQ} | Q \in \overline{AD}) \right) \\
& + \frac{2}{5} (1-p_1)^2 \left(\frac{1}{3} E(\overline{AQ} | Q \in \overline{CD}) + \frac{1}{3} E(\overline{CQ} | Q \in \overline{BC}) \right) \\
& + \frac{2}{5} p_1(1-p_1) \left(\frac{1}{3} \frac{1-p_1}{(1-p_1) - (1-p_2)} E(\overline{AQ} | Q \in \overline{CD}) \right. \\
& \quad + \frac{1}{3} \frac{1-p_2}{(1-p_2) - (1-p_1)} E(\overline{BQ} | Q \in \overline{CD}) \\
& \quad + \frac{1}{3} \frac{p_1}{p_1 - p_2} E(\overline{CQ} | Q \in \overline{AB}) \\
& \quad \left. + \frac{1}{3} \frac{p_2}{p_2 - p_1} E(\overline{DQ} | Q \in \overline{AB}) \right)
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich

Satz 7 *In einem konvexen Viereck $\square ABCD$, in dem keine Seiten zueinander parallel sind, beträgt der mittlere Abstand zweier Punkte:*

$$\begin{aligned}
& E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \square ABCD \wedge Q_2 \in \square ABCD) \\
& = \frac{2}{15} \left(\frac{p_1^2 p_2}{p_1 + p_2 - 1} E(\overline{AQ} | Q \in \overline{BC}) \right. \\
& \quad + \frac{(1-p_1)^2 p_2}{(1-p_1) + p_2 - 1} E(\overline{AQ} | Q \in \overline{CD}) \\
& \quad \left. + \frac{p_2^2 p_1}{p_2 + p_1 - 1} E(\overline{BQ} | Q \in \overline{AD}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(1-p_2)^2 p_1}{(1-p_2)+p_1-1} E(\overline{BQ} | Q \in \overline{CD}) \\
& + \frac{p_1^2(1-p_2)}{p_1+(1-p_2)-1} E(\overline{CQ} | Q \in \overline{AB}) \\
& + \frac{(1-p_1)^2(1-p_2)}{(1-p_1)+(1-p_2)-1} E(\overline{CQ} | Q \in \overline{AD}) \\
& + \frac{p_2^2(1-p_1)}{p_2+(1-p_1)-1} E(\overline{DQ} | Q \in \overline{AB}) \\
& + \frac{(1-p_2)^2(1-p_1)}{(1-p_2)+(1-p_1)-1} E(\overline{DQ} | Q \in \overline{BC}) \Big)
\end{aligned}$$

wobei $p_1 = \frac{A(\triangle ABC)}{A(\square ABCD)}$ und $p_2 = \frac{A(\triangle ABD)}{A(\square ABCD)}$.

(convex quadrilateral line picking)

5 Der mittlere Abstand der Punkte nicht-konvexer Flächen

In Übereinstimmung mit der traditionellen Herangehensweise sind die bisherigen Betrachtungen stets von konvexen Polygonen ausgegangen. Es lässt sich mit der Methode der Projektiven Reduktion aber auch der mittlere Abstand zweier Punkte bestimmter nicht-konvexer Polygone und sogar verschiedener nicht zusammenhängenden Flächen berechnen. Wir fangen zunächst mit einer einfachen Figur an, um dann zu komplexeren Anwendungen zu gelangen.

5.1 Das konkave Viereck

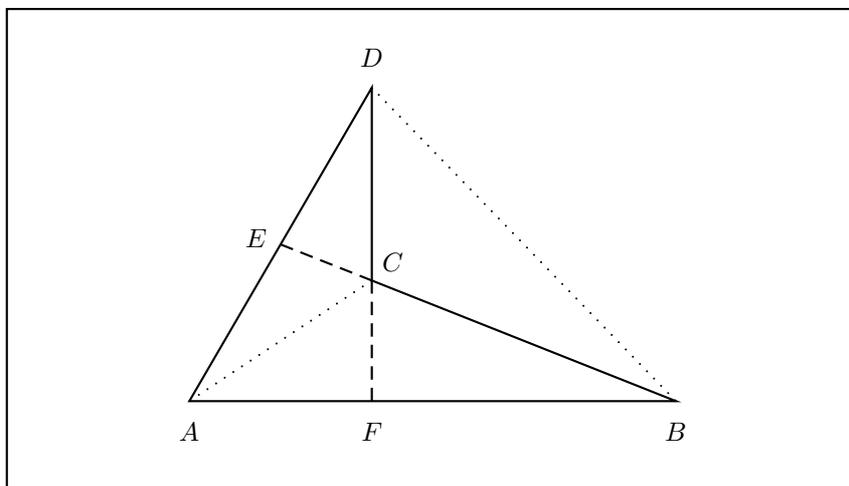


Abbildung 11: Das konkave Viereck

Gegeben sei das konkave Viereck $\square ABCD$, wobei C innerhalb von $\triangle ABD$ liegt. Durch Verlängerung der Seiten \overline{BC} und \overline{CD} auf die Gegenseiten erhält man die Schnittpunkte E und F (siehe Abbildung 11). Es werden weiter die Flächenverhältnisse $p_1 = \frac{A(\triangle ABC)}{A(\square ABCD)}$ und $p_2 = \frac{A(\triangle ABD)}{A(\square ABCD)}$ benötigt.

Der Erwartungswert berechnet sich bei geschickter Wahl der Streckzentren zunächst genau wie beim konvexen Viereck:

$$\begin{aligned}
 & E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \square ABCD \wedge Q_2 \in \square ABCD) \\
 & \stackrel{(z=A)}{=} \frac{4}{5} p_1 E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \square ABCD) \\
 & \quad + \frac{4}{5} (1 - p_1) E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{CD} \wedge Q_2 \in \square ABCD) \\
 & \stackrel{(z=C)}{=} \frac{1}{4} \frac{4}{5} p_1 E(\overline{BQ} \mid Q \in \square ABCD) \\
 & \quad + \frac{2}{4} \frac{4}{5} p_1^2 E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \overline{AB})
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{4} \frac{4}{5} p_1 (1 - p_1) E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \overline{AD}) \quad (5) \\
& + \frac{1}{4} \frac{4}{5} (1 - p_1) E(\overline{DQ} | Q \in \square ABCD) \\
& + \frac{2}{4} \frac{4}{5} (1 - p_1)^2 E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{CD} \wedge Q_2 \in \overline{AD}) \\
& + \frac{2}{4} \frac{4}{5} p_1 (1 - p_1) E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{CD} \wedge Q_2 \in \overline{AB})
\end{aligned}$$

Der entstehende Term ist also identisch mit dem entsprechendem Term beim konvexen Viereck.

Den Erwartungswert in Zeile (4) erhält man mit der Überlegung

$$\begin{aligned}
& E(\overline{BQ} | Q \in \triangle ABD) \\
& = \frac{1}{p_2} E(\overline{BQ} | Q \in \square ABCD) + (1 - \frac{1}{p_2}) E(\overline{BQ} | Q \in \triangle BCD)
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
& E(\overline{BQ} | Q \in \square ABCD) \\
& = p_2 \frac{2}{3} E(\overline{BQ} | Q \in \overline{AD}) + (1 - p_2) \frac{2}{3} E(\overline{BQ} | Q \in \overline{CD})
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist also wiederum identisch mit dem entsprechendem Term beim konvexen Viereck.

Den Erwartungswert aus Zeile (5) erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned}
& E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \overline{AD}) \\
& = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \overline{AE}) \\
& \quad + \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \overline{DE}) \\
& \stackrel{(\text{Satz 5})}{=} \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \left(\frac{\overline{AE}}{3 \overline{AE}} E(\overline{AQ} | Q \in \overline{BC}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\overline{BE}}{3 \overline{BC}} E(\overline{BQ} | Q \in \overline{AE}) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\overline{CE}}{3 \overline{BC}} E(\overline{CQ} | Q \in \overline{AE}) \right) \\
& \quad + \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \left(\frac{\overline{DE}}{3 \overline{DE}} E(\overline{DQ} | Q \in \overline{BC}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\overline{BE}}{3 \overline{BC}} E(\overline{BQ} | Q \in \overline{DE}) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\overline{CE}}{3 \overline{BC}} E(\overline{CQ} | Q \in \overline{DE}) \right) \\
& = \frac{\overline{AE}}{3 \overline{AD}} E(\overline{AQ} | Q \in \overline{BC}) \\
& \quad + \frac{\overline{DE}}{3 \overline{AD}} E(\overline{DQ} | Q \in \overline{BC})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\overline{BE}}{3\overline{BC}} E(\overline{BQ} | Q \in \overline{AD}) \\
& - \frac{\overline{CE}}{3\overline{BC}} E(\overline{CQ} | Q \in \overline{AD})
\end{aligned}$$

Ersetzt man die Streckenverhältnisse durch die korrespondierenden Flächenverhältnisse, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{BC} \wedge Q_2 \in \overline{AD}) \\
& = \frac{1}{3} \frac{p_1}{p_1 + p_2 - 1} E(\overline{AQ} | Q \in \overline{BC}) \\
& \quad + \frac{1}{3} \frac{p_2}{p_1 + p_2 - 1} E(\overline{BQ} | Q \in \overline{AD}) \\
& \quad + \frac{1}{3} \frac{1 - p_1}{1 - p_1 - p_2} E(\overline{CQ} | Q \in \overline{AD}) \\
& \quad + \frac{1}{3} \frac{1 - p_2}{1 - p_1 - p_2} E(\overline{DQ} | Q \in \overline{BC})
\end{aligned}$$

Auch hier entsteht exakt derselbe Term wie beim konvexen Viereck. Die übrigen Erwartungswerte leiten sich nach den bekannten Sätzen her und unterscheiden sich daher formal auch nicht vom Fall des konvexen Vierecks; somit gilt:

Satz 8 *In einem konkaven Viereck $\square ABCD$ mit $C \in \triangle ABD$ beträgt der mittlere Abstand zweier Punkte:*

$$\begin{aligned}
& E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \square ABCD \wedge Q_2 \in \square ABCD) \\
& = \frac{2}{15} \left(\frac{p_1^2 p_2}{p_1 + p_2 - 1} E(\overline{AQ} | Q \in \overline{BC}) \right. \\
& \quad + \frac{(1 - p_1)^2 p_2}{(1 - p_1) + p_2 - 1} E(\overline{AQ} | Q \in \overline{CD}) \\
& \quad + \frac{p_2^2 p_1}{p_2 + p_1 - 1} E(\overline{BQ} | Q \in \overline{AD}) \\
& \quad + \frac{(1 - p_2)^2 p_1}{(1 - p_2) + p_1 - 1} E(\overline{BQ} | Q \in \overline{CD}) \\
& \quad + \frac{p_1^2 (1 - p_2)}{p_1 + (1 - p_2) - 1} E(\overline{CQ} | Q \in \overline{AB}) \\
& \quad + \frac{(1 - p_1)^2 (1 - p_2)}{(1 - p_1) + (1 - p_2) - 1} E(\overline{CQ} | Q \in \overline{AD}) \\
& \quad + \frac{p_2^2 (1 - p_1)}{p_2 + (1 - p_1) - 1} E(\overline{DQ} | Q \in \overline{AB}) \\
& \quad \left. + \frac{(1 - p_2)^2 (1 - p_1)}{(1 - p_2) + (1 - p_1) - 1} E(\overline{DQ} | Q \in \overline{BC}) \right)
\end{aligned}$$

wobei $p_1 = \frac{A(\triangle ABC)}{A(\square ABCD)}$ und $p_2 = \frac{A(\triangle ABD)}{A(\square ABCD)}$.

(concave quadrilateral line picking)

5.2 Getrennte Flächen

Wir untersuchen in der Ebene eine Punktmenge M mit der Fläche A , die sich aus drei disjunkten Teilmengen M_1 , M_2 und M_3 mit den Flächeninhalten A_1 , A_2 und A_3 zusammensetzt (siehe Abbildung 12).

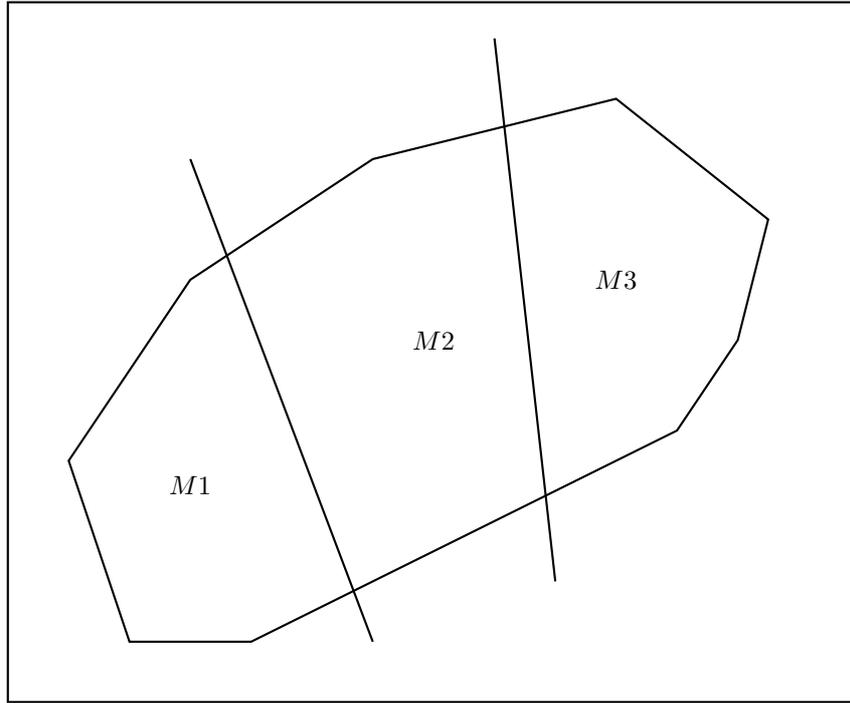


Abbildung 12: Disjunct Areas Picking

Wählt man zufällig zwei Punkte in M , so entspricht der Erwartungswert des Abstandes dieser Punkte:

$$\begin{aligned}
 & E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in M \wedge Q_2 \in M) \\
 &= \frac{A_1^2}{A^2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in M_1 \wedge Q_2 \in M_1) \\
 &\quad + \frac{A_2^2}{A^2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in M_2 \wedge Q_2 \in M_2) \\
 &\quad + \frac{A_3^2}{A^2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in M_3 \wedge Q_2 \in M_3) \\
 &\quad + 2 \frac{A_1 A_2}{A^2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in M_1 \wedge Q_2 \in M_2) \\
 &\quad + 2 \frac{A_2 A_3}{A^2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in M_2 \wedge Q_2 \in M_3) \\
 &\quad + 2 \frac{A_1 A_3}{A^2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in M_1 \wedge Q_2 \in M_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A_2^2}{A^2}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in M_2 \wedge Q_2 \in M_2) \\
&\quad + \left(\frac{A_1^2}{A^2}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in M_1 \wedge Q_2 \in M_1) \right. \\
&\quad\quad + 2\frac{A_1A_2}{A^2}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in M_1 \wedge Q_2 \in M_2) \\
&\quad\quad + \frac{A_2^2}{A^2}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in M_2 \wedge Q_2 \in M_2) \left. \right) \\
&\quad + \left(\frac{A_2^2}{A^2}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in M_2 \wedge Q_2 \in M_2) \right. \\
&\quad\quad + 2\frac{A_2A_3}{A^2}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in M_2 \wedge Q_2 \in M_3) \\
&\quad\quad + \frac{A_3^2}{A^2}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in M_3 \wedge Q_2 \in M_3) \left. \right) \\
&\quad + 2\frac{A_1A_3}{A^2}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in M_1 \wedge Q_2 \in M_3) \\
&= -\frac{A_2^2}{A^2}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in M_2 \wedge Q_2 \in M_2) \\
&\quad + \frac{(A_1 + A_2)^2}{A^2}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in M_1 \cup M_2 \wedge Q_2 \in M_1 \cup M_2) \\
&\quad + \frac{(A_2 + A_3)^2}{A^2}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in M_2 \cup M_3 \wedge Q_2 \in M_2 \cup M_3) \\
&\quad + 2\frac{A_1A_3}{A^2}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in M_1 \wedge Q_2 \in M_3)
\end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich folgender Satz

Satz 9 Gegeben sei in der Ebene eine Punktmenge M mit der Fläche A , die sich aus drei disjunkten Teilmengen M_1 , M_2 und M_3 mit den Flächeninhalten A_1 , A_2 und A_3 zusammensetzt. Der mittlere Abstand der Punkte von M_1 zu den Punkten von M_3 beträgt dann

$$\begin{aligned}
&E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in M_1 \wedge Q_2 \in M_3) \\
&= \frac{A^2}{2A_1A_3}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in M \wedge Q_2 \in M) \\
&\quad + \frac{A_2^2}{2A_1A_3}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in M_2 \wedge Q_2 \in M_2) \\
&\quad - \frac{(A_1 + A_2)^2}{2A_1A_3}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in M_1 \cup M_2 \wedge Q_2 \in M_1 \cup M_2) \\
&\quad - \frac{(A_2 + A_3)^2}{2A_1A_3}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in M_2 \cup M_3 \wedge Q_2 \in M_2 \cup M_3)
\end{aligned}$$

(disjunct areas picking)

Sind die Terme auf der rechten Seite der Gleichung berechenbar, so ist auch der Erwartungswert für die disjunkten Flächen M_1 und M_3 berechenbar. Dies ist immer der Fall, wenn M ein konvexes Polygon und M_1 und M_3 durch Geraden

von M abgetrennt werden. Falls $M_2 = \emptyset$ ist, vereinfacht sich die Formel durch $A_2 = 0$.

5.3 Ein Stern als komplexes Beispiel

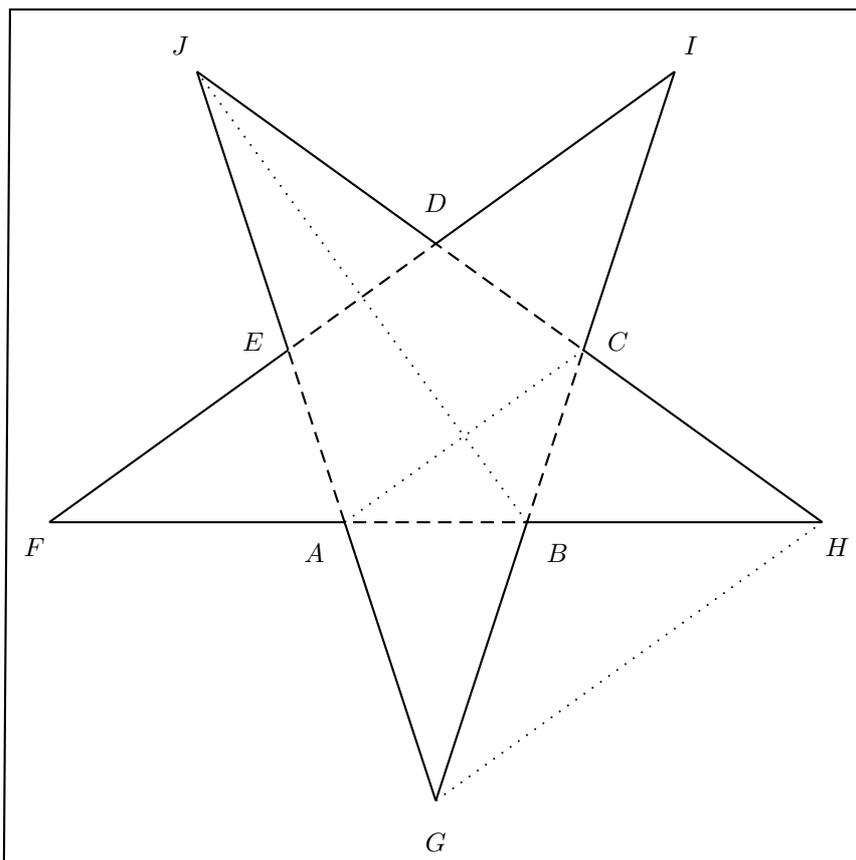


Abbildung 13: Der regelmäßige fünfzackige Stern

Die bisher erarbeiteten Sätze erlauben es, den mittleren Abstand zweier Punkte auch für komplexe, zusammengesetzte Flächen zu berechnen. In Abbildung (13) wurde der Stern dargestellt, der aus der Verlängerung der Seiten eines regelmäßigen fünfzackigen Pentagons mit der Seitenlänge $\overline{AB} = 1$ entsteht.

Das Flächenverhältnis des inneren Pentagons \overbrace{ABCDE} zu einem der äußeren Zacken $\triangle AGB$ beträgt

$$\frac{A(\overbrace{ABCDE})}{A(\triangle AGB)} = \sqrt{5}$$

Fasst man identische Erwartungswerte zusammen, kann somit der gesuchte Erwartungswert wie folgt aufgespalten werden:

$$\begin{aligned}
& E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overbrace{AGBHCIDJEF} \wedge Q_2 \in \overbrace{AGBHCIDJEF}) \\
&= \frac{\sqrt{5}\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})^2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overbrace{ABCDE} \wedge Q_2 \in \overbrace{ABCDE}) \\
&\quad + 2 \frac{5\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})^2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overbrace{ABCDE} \wedge Q_2 \in \triangle AGB) \\
&\quad + \frac{5}{(5+\sqrt{5})^2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \triangle AGB \wedge Q_2 \in \triangle AGB) \\
&\quad + 2 \frac{5}{(5+\sqrt{5})^2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \triangle AGB \wedge Q_2 \in \triangle BHC) \\
&\quad + 2 \frac{5}{(5+\sqrt{5})^2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \triangle AGB \wedge Q_2 \in \triangle CID) \\
&\stackrel{(\text{Satz8})}{=} \frac{3-\sqrt{5}}{8} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overbrace{ABCDE} \wedge Q_2 \in \overbrace{ABCDE}) \\
&\quad + \frac{3\sqrt{5}-5}{4} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \square CDEG \wedge Q_2 \in \square CDEG) \right. \\
&\quad \quad - \frac{1}{2\sqrt{5}} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \triangle AGB \wedge Q_2 \in \triangle AGB) \\
&\quad \quad \left. - \frac{\sqrt{5}}{2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overbrace{ABCDE} \wedge Q_2 \in \overbrace{ABCDE}) \right) \\
&\quad + \frac{3-\sqrt{5}}{8} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \triangle AGB \wedge Q_2 \in \triangle AGB) \\
&\quad + \frac{3-\sqrt{5}}{4} \left(\frac{(3+\sqrt{5})^2}{2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \square BHJG \wedge Q_2 \in \square BHJG) \right. \\
&\quad \quad + \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \square ABCJ \wedge Q_2 \in \square ABCJ) \\
&\quad \quad - \frac{(2+\sqrt{5})^2}{2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \triangle CJG \wedge Q_2 \in \triangle CJG) \\
&\quad \quad \left. - \frac{(2+\sqrt{5})^2}{2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \triangle AHJ \wedge Q_2 \in \triangle AHJ) \right) \\
&\quad + \frac{3-\sqrt{5}}{4} \left(\frac{(2+\sqrt{5})^2}{2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \triangle EGI \wedge Q_2 \in \triangle EGI) \right. \\
&\quad \quad + \frac{(\sqrt{5})^2}{2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overbrace{ABCDE} \wedge Q_2 \in \overbrace{ABCDE}) \\
&\quad \quad - \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \square CDEG \wedge Q_2 \in \square CDEG) \\
&\quad \quad \left. - \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \square ABIE \wedge Q_2 \in \square ABIE) \right) \\
&= \frac{3-\sqrt{5}}{8} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overbrace{ABCDE} \wedge Q_2 \in \overbrace{ABCDE}) \\
&\quad - \frac{7+3\sqrt{5}}{2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \triangle AHJ \wedge Q_2 \in \triangle AHJ)
\end{aligned}$$

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \square BHJG \wedge Q_2 \in \square BHJG)$$

Setzt man nun den bekannten Ausdruck für das regelmäßige Fünfeck ein und wendet für das Dreieck den Satz 4 und für das Viereck den Satz 8 mit $p_1 = \frac{1}{2}$ und $p_2 = \frac{A(\triangle GHJ)}{A(\triangle BGH)} = \frac{\sqrt{5}+3}{4}$ an, so erhält man:

$$\begin{aligned} & E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overbrace{AGBHCIDJEF} \wedge Q_2 \in \overbrace{AGBHCIDJEF}) \\ &= \frac{3 - \sqrt{5}}{8} \left(\frac{2}{15} (\sqrt{5} + 2) E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{CD}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{15} (\sqrt{5} - 1) E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{BC}) \right) \\ &\quad - \frac{7 + 3\sqrt{5}}{8} \left(\frac{2}{15} E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{HJ}) + 2 \frac{2}{15} E(\overline{HQ} \mid Q \in \overline{AJ}) \right) \\ &\quad + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \left(2 \frac{2}{15} \frac{1 + \sqrt{5}}{8} E(\overline{JQ} \mid Q \in \overline{BG}) \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{2}{15} \frac{2 + \sqrt{5}}{4} E(\overline{GQ} \mid Q \in \overline{HJ}) \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{2}{15} \frac{\sqrt{5} - 2}{4} E(\overline{GQ} \mid Q \in \overline{BH}) \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{2}{15} \frac{3 - \sqrt{5}}{8} E(\overline{BQ} \mid Q \in \overline{GJ}) \right) \\ &= \frac{1}{60} \left((1 + \sqrt{5}) E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{CD}) - (4\sqrt{5} - 8) E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{BC}) \right. \\ &\quad \left. - (7 + 3\sqrt{5}) E(\overline{AQ} \mid Q \in \overline{HJ}) - (14 + 6\sqrt{5}) E(\overline{HQ} \mid Q \in \overline{AJ}) \right. \\ &\quad \left. + (8 + 4\sqrt{5}) E(\overline{JQ} \mid Q \in \overline{BG}) + (22 + 10\sqrt{5}) E(\overline{GQ} \mid Q \in \overline{HJ}) \right. \\ &\quad \left. - (2\sqrt{5} - 2) E(\overline{GQ} \mid Q \in \overline{BH}) + 4 E(\overline{BQ} \mid Q \in \overline{GJ}) \right) \\ &= \frac{1}{60} \left((1 + \sqrt{5}) E_2 \left(1, \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - (4\sqrt{5} - 8) E_2 \left(1, \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - (7 + 3\sqrt{5}) E_2 \left(\sqrt{5} + 2, \frac{\sqrt{5} + 3}{2}, \frac{\sqrt{5} + 3}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - (14 + 6\sqrt{5}) E_2 \left(\frac{\sqrt{5} + 3}{2}, \sqrt{5} + 2, \frac{\sqrt{5} + 3}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + (8 + 4\sqrt{5}) E_2 \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \sqrt{5} + 2, \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \right) \right. \\ &\quad \left. + (22 + 10\sqrt{5}) E_2 \left(\sqrt{5} + 2, \sqrt{5} + 2, \frac{\sqrt{5} + 3}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - (2\sqrt{5} - 2) E_2 \left(\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}, \sqrt{5} + 2, \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 4 E_2 \left(\sqrt{5} + 2, \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Setzt man nach Satz 3 die explizite Formel für die Funktion E_2 ein, so erhält

man nach längerem Umformen folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned}
& E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overbrace{AGBHCIDJEF} \wedge Q_2 \in \overbrace{AGBHCIDJEF}) \\
&= \frac{1}{240} \left((29\sqrt{5} + 65) \ln((\sqrt{5} + 3)\sqrt{2\sqrt{5} + 5} - 2\sqrt{5} - 5) \right. \\
&\quad + (3\sqrt{5} - 5) \ln((\sqrt{5} + 1)\sqrt{2\sqrt{5} + 5} + 2\sqrt{5} + 5) \\
&\quad - 20(\sqrt{5} + 2) \ln(5) \\
&\quad \left. - 10(\sqrt{5} + 1)\sqrt{2\sqrt{5} + 5} + 66\sqrt{5} + 170 \right) \\
&\approx 1.38569603515211\dots
\end{aligned}$$

Die Plausibilität des Ergebnisses kann nach der Monte Carlo Methode überprüft werden. Eine Simulation mit 10^8 Durchläufen ergab einen Mittelwert von $1.38570264\dots$, der mit einer Abweichung vom berechneten Wert von $\approx 4.8 \cdot 10^{-4}\%$ im erwarteten Bereich liegt.

6 Berechnung der Verteilungsfunktionen

Die zur Berechnung eines Erwartungswertes des Abstandes zweier Punkte durchgeführte Projektive Reduktion lässt sich auch zur Berechnung der korrespondierenden Verteilungsfunktion nutzen.

Betrachten wir nochmals in Abbildung 2 den ersten Zwischenschritt mit der Projektion von $\overline{Q_1 Q_2}$ auf $\overline{Q'_1 Q'_2}$, wobei wir dieselben Bezeichnungen für die involvierten Punktmengen verwenden wie in Kapitel 3. Wie oben dargestellt, werden bei jedem Projektionsschritt in Abhängigkeit von den Dimensionen d_1 und d_2 zwei Fälle mit der Wahrscheinlichkeit $p_1 = \frac{d_1}{d_1+d_2}$ bzw. $p_2 = \frac{d_2}{d_1+d_2}$ unterschieden, die nicht vom Streckungsfaktor r abhängig sind. Für jeden dieser Fälle gibt es demnach für die jeweilige Projektionsfigur eine bestimmte Verteilungsfunktion $F_{P_1}(s) = P(\overline{Q'_1 Q'_2} < s | Q'_1 \in \rho M_1 \wedge Q'_2 \in M_2)$ bzw. $F_{P_2}(s) = P(\overline{Q'_1 Q'_2} < s | Q'_1 \in M_1 \wedge Q'_2 \in \rho M_2)$ für die Länge der Strecke $s = \overline{Q'_1 Q'_2}$ nach dem Projektionsschritt. Die Verteilungsfunktion für die Gesamtprojektion

$$F_P(s) = p_1 F_{P_1}(s) + p_2 F_{P_2}(s)$$

ist also von r unabhängig. Die Rückprojektion von $\overline{Q'_1 Q'_2}$ auf $\overline{Q_1 Q_2}$ ist gleichbedeutend mit einer Streckung mit dem Streckfaktor r . Daher können wir die Verteilungsfunktion des ursprünglichen Abstandes $S = \overline{Q_1 Q_2}$ in Abhängigkeit von einem bestimmten Streckfaktor $r = r_0$ (der durch die spezifische Lage von Q_1 und Q_2 bestimmt wird), wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} F_{(r_0)}(s) &= P(\overline{Q_1 Q_2} < s | Q_1 \in M_1 \wedge Q_2 \in M_2 \wedge r = r_0) \\ &= p_1 P(\overline{Q_1 Q_2} < s | Q'_1 \in \rho M_1 \wedge Q'_2 \in M_2 \wedge r = r_0) \\ &\quad + p_2 P(\overline{Q_1 Q_2} < s | Q'_1 \in M_1 \wedge Q'_2 \in \rho M_2 \wedge r = r_0) \\ &= p_1 P(\overline{Q'_1 Q'_2} < \frac{s}{r_0} | Q'_1 \in \rho M_1 \wedge Q'_2 \in M_2) \\ &\quad + p_2 P(\overline{Q'_1 Q'_2} < \frac{s}{r_0} | Q'_1 \in M_1 \wedge Q'_2 \in \rho M_2) \\ &= F_P\left(\frac{s}{r_0}\right) \end{aligned}$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty f_r(r) F_{(r)}(s) dr = \int_0^\infty f_r(r) F_P\left(\frac{s}{r}\right) dr \\ &= p_1 \int_0^\infty f_r(r) F_{P_1}\left(\frac{s}{r}\right) dr + p_2 \int_0^\infty f_r(r) F_{P_2}\left(\frac{s}{r}\right) dr \end{aligned} \quad (6)$$

mit $f_r(r) = (d_1 + d_2) r^{d_1+d_2-1}$ für $r \leq 1$ bzw. $f_r(r) = 0$ für $r > 1$.

Also lässt sich die Verteilungsfunktion des Abstandes zweier Punkte in der Ursprungsfigur direkt aus den Verteilungsfunktionen des Abstandes zweier Punkte in den bei jedem Projektionsschritt entstehenden Figuren und der Dichtefunktion für den Projektionsfaktor r errechnen.

Somit könnten wir die ursprünglichen Verteilungsfunktion schrittweise bestimmen, indem wir, beginnend mit der letzten Projektion mit den geringsten Freiheitsgraden, jeweils auf die vorherige Projektion zurückrechnen. Es zeigt sich

allerdings, dass bei den Zwischenschritten oft schwer handhabbare Integrale auftreten, so dass es meistens ratsamer ist, die ursprüngliche Verteilungsfunktion direkt aus dem letzten Projektionsschritt zu berechnen. Dies ist ohne weiteres möglich, das die verschiedenen Projektionsschritte aus geometrischer Sicht nichts anderes sind als nacheinander ausgeführte Streckungen, die somit zu einer einzigen Streckung zusammengefasst werden können.

Da darüber hinaus nicht nur der Basissatz der Projektiven Reduktion, sondern auch alle anderen bisher erarbeiteten Sätze nicht nur die Unabhängigkeit der einzelnen Projektionsfälle sondern auch die Gleichverteilung der projizierten Punkte innerhalb der Projektionsmengen garantieren, kann die Gleichung 6 allgemein angewendet werden. Da sich die Anzahl der durchgeführten Projektionsschritte für die Teilprojektionen unterscheiden kann (wie die ein- und zwei-dimensionalen Projektionen beim regelmäßigen Sechseck), müssen allerdings gelegentlich unterschiedliche Dichtefunktionen der Streckfaktors r berücksichtigt werden. Somit gilt:

Satz 10 *Führt die Projektive Reduktion einer geometrischen Figur, in der zwei Punkte zufällig gewählt werden, mit jeweils der Wahrscheinlichkeit p_i zu n verschiedenen Teilprojektionen mit der jeweiligen Verteilungsfunktionen F_{P_i} des jeweiligen Abstandes der projizierten Punkte und einer jeweiligen (nur von der Dimensionsreduktion abhängigen) Dichtefunktion f_{r_i} des Projektionsfaktors r_i , so ergibt sich die ursprüngliche Verteilungsfunktion zu*

$$F(s) = \sum_{i=1}^n p_i \int_0^{\infty} f_{r_i} F_{P_i}\left(\frac{s}{r_i}\right) dr_i$$

6.1 Die Verteilungsfunktion in zweidimensionalen Figuren

Als Beispiel für die Anwendung des obigen Satzes wollen wir die dreistufige Projektive Reduktion beim beliebigen Dreieck betrachten. Der Gesamtstreckfaktor r (der letztlich die Vergrößerung durch die Projektionsschritte kompensiert) ergibt sich aus $r = r_1 r_2 r_3$, wobei r_1 , r_2 und r_3 die jeweiligen Streckfaktoren bei den aufeinander folgenden Projektionen sind. Da in jedem Schritt die Wahrscheinlichkeit des Auftretens der verschiedenen Projektionsmöglichkeiten von den jeweiligen Streckfaktoren r_1 bis r_3 unabhängig sind, sind auch die letztendlich resultierenden drei Fälle von r als Produkt der ursprünglichen Streckfaktoren unabhängig. Die Wahrscheinlichkeit der drei Fälle ist sofort aus Gleichung (3) für den Erwartungswert abzulesen. Da, unabhängig von der Auftretenswahrscheinlichkeit der einzelnen Fälle, der Korrekturfaktor für die partiellen Erwartungswerte bei jedem Schritt $\frac{d_1+d_2}{d_1+d_2+1}$ beträgt, ergibt sich für alle 3 Schritte zusammen der Faktor $\frac{4}{5} \frac{3}{4} \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$. Reduziert man den Gesamtprojektionsfaktor $\frac{2}{15}$ in Gleichung (3) um diese Größe, so erhält man dementsprechend für jeden Fall die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$.

Nun fehlt nur noch die Dichtefunktion $f_r(r)$, die sich aus den Verteilungsfunktionen der Basisstreckfaktoren errechnen lässt. Es gilt:

$$\begin{aligned} F_{r_1}(r_1) &= r_1^4; & f_{r_1}(r_1) &= 4 r_1^3; \\ F_{r_2}(r_2) &= r_2^3; & f_{r_2}(r_2) &= 3 r_2^2; \end{aligned}$$

$$F_{r3}(r_3) = r_3^2;$$

$$\begin{aligned} F_r(r) &= P(r_1 r_2 r_3 < r) \\ &= P(r_1 < r) + P(r_1 > r)P(r_1 r_2 < r \mid r_1 > r) \\ &\quad + P(r_1 > r)P(r_1 r_2 > r \mid r_1 > r)P(r_1 r_2 r_3 < r \mid r_1 > r \wedge r_1 r_2 > r) \\ &= F_{r1}(r) + \int_{r_1=r}^1 f_{r1}(r_1) F_{r2}\left(\frac{r}{r_1}\right) dr_1 \\ &\quad + \int_{r_1=r}^1 f_{r1}(r_1) \int_{r_2=\frac{r}{r_1}}^1 f_{r2}(r_2) F_{r3}\left(\frac{r}{r_1 r_2}\right) dr_2 dr_1 \\ &= r^4 + \int_{r_1=r}^1 4r_1^3 \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 dr_1 \\ &\quad + \int_{r_1=r}^1 4r_1^3 \int_{r_2=\frac{r}{r_1}}^1 3r_2^2 \left(\frac{r}{r_1 r_2}\right)^2 dr_2 dr_1 \\ &= 3r^4 - 8r^3 + 6r^2 \end{aligned}$$

Somit ist

$$f_r(r) = F'_r(s) = \begin{cases} 12r(1-r)^2 & \text{für } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{für } r \geq 1 \end{cases}$$

Somit ergibt sich für die Verteilungsfunktion des Abstandes zweier Punkte in einem Dreieck $\triangle ABC$ folgender Ansatz:

$$\begin{aligned} F(s) &= p_1 \int_0^\infty f_r(r) F_{P1}\left(\frac{s}{r}\right) dr \\ &\quad + p_2 \int_0^\infty f_r(r) F_{P2}\left(\frac{s}{r}\right) dr \\ &\quad + p_3 \int_0^\infty f_r(r) F_{P3}\left(\frac{s}{r}\right) dr \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 12r(1-r)^2 P(\overline{AQ} \leq \frac{s}{r} \mid Q \in \overline{BC}) dr \\ &\quad + \frac{1}{3} \int_0^1 12r(1-r)^2 P(\overline{BQ} \leq \frac{s}{r} \mid Q \in \overline{AC}) dr \\ &\quad + \frac{1}{3} \int_0^1 12r(1-r)^2 P(\overline{CQ} \leq \frac{s}{r} \mid Q \in \overline{AB}) dr \end{aligned}$$

6.2 Die konkrete Berechnung der Verteilungsfunktionen

Für die konkrete Berechnung der Verteilungsfunktionen der Teilprojektionen benötigen wir zunächst den analytischen Ausdruck von beispielsweise $F_{P1}(s) = P(\overline{AQ} \leq s \mid Q \in \overline{BC})$. Gehen wir von dem allgemeinen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a , b und c aus, so kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit von $b \leq c$ ausgegangen werden, da ansonsten einfach das gespiegelte Dreieck verwendet werden kann. Nehmen wir zunächst an, dass $\angle ACB < \frac{\pi}{2}$ (siehe Abbildung

14). Zur besseren Übersichtlichkeit verwenden wir im Folgenden für die Verteilungsfunktion der projizierten Strecke und für die Verteilungsfunktion der ursprünglichen Strecke die Bezeichnungen $G_P(s)$ und $G(s)$.

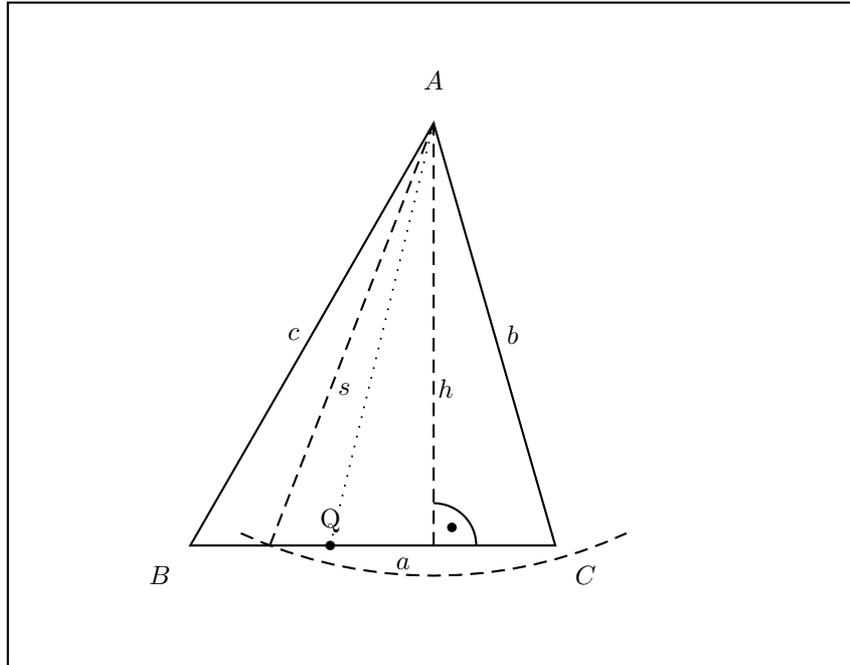


Abbildung 14: Verteilungsfunktion im Dreieck, Fall 1

Aufgrund der Gleichverteilung der Lage von Q auf a wird $P(\overline{AQ} < s)$ durch die Abdeckung der Strecke a durch einen Kreis um A mit Radius s dargestellt. Unter der Verwendung der auf a senkrechten Höhe h ergibt sich somit:

$$G_P(s) = \begin{cases} 0 & \text{für } s < h \\ \frac{1}{a} 2\sqrt{s^2 - h^2} & \text{für } h \leq s < b \\ \frac{1}{a} (\sqrt{s^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2}) & \text{für } b \leq s \leq c \\ 1 & \text{für } c < s \end{cases}$$

Daher ist

$$G_P\left(\frac{s}{r}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{s}{h} < r \\ \frac{1}{a} 2\sqrt{\left(\frac{s}{r}\right)^2 - h^2} & \text{für } \frac{s}{b} < r \leq \frac{s}{h} \\ \frac{1}{a} (\sqrt{\left(\frac{s}{r}\right)^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2}) & \text{für } \frac{s}{c} < r \leq \frac{s}{b} \\ 1 & \text{für } r < \frac{s}{c} \end{cases}$$

Somit erhalten wir die Verteilungsfunktion $G(s)$ für den Abstand der ursprüng-

lichen Punkte:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \int_0^\infty f_r(r) G_P\left(\frac{s}{r}\right) dr \\
 &= \int_0^{\frac{s}{c}} f_r(r) dr \\
 &\quad + \int_{\frac{s}{c}}^{\frac{s}{b}} f_r(r) \frac{1}{a} \left(\sqrt{\left(\frac{s}{r}\right)^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2} \right) dr \\
 &\quad + \int_{\frac{s}{b}}^{\frac{s}{h}} f_r(r) \frac{1}{a} 2 \sqrt{\left(\frac{s}{r}\right)^2 - h^2} dr
 \end{aligned}$$

Für $s < h$ ist

$$\begin{aligned}
 G_1(s) &= \int_0^\infty f_r(r) G_P\left(\frac{s}{r}\right) dr \\
 &= \int_0^{\frac{s}{c}} f_r(r) dr \\
 &\quad + \int_{\frac{s}{c}}^{\frac{s}{b}} f_r(r) \frac{1}{a} \left(\sqrt{\left(\frac{s}{r}\right)^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2} \right) dr \\
 &\quad + \int_{\frac{s}{b}}^{\frac{s}{h}} f_r(r) \frac{1}{a} 2 \sqrt{\left(\frac{s}{r}\right)^2 - h^2} dr \\
 &= \int_0^{\frac{s}{c}} 12 r (1-r)^2 dr \\
 &\quad + \int_{\frac{s}{c}}^{\frac{s}{b}} 12 r (1-r)^2 \frac{1}{a} \left(\sqrt{\left(\frac{s}{r}\right)^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2} \right) dr \\
 &\quad + \int_{\frac{s}{b}}^{\frac{s}{h}} 12 r (1-r)^2 \frac{1}{a} 2 \sqrt{\left(\frac{s}{r}\right)^2 - h^2} dr \\
 &= \int_0^{\frac{s}{c}} 12 r (1-r)^2 dr \\
 &\quad + \int_{\frac{s}{c}}^{\frac{s}{b}} 12 (1-r)^2 \frac{1}{a} \left(\sqrt{s^2 - h^2 r^2} + r \sqrt{b^2 - h^2} \right) dr \\
 &\quad + \int_{\frac{s}{b}}^{\frac{s}{h}} 12 (1-r)^2 \frac{1}{a} 2 \sqrt{s^2 - h^2 r^2} dr
 \end{aligned}$$

Für $h \leq s < b$ ist

$$\begin{aligned}
 G_2(s) &= \int_0^{\frac{s}{c}} 12 r (1-r)^2 dr \\
 &\quad + \int_{\frac{s}{c}}^{\frac{s}{b}} 12 (1-r)^2 \frac{1}{a} \left(\sqrt{s^2 - h^2 r^2} + r \sqrt{b^2 - h^2} \right) dr \\
 &\quad + \int_{\frac{s}{b}}^1 12 (1-r)^2 \frac{1}{a} 2 \sqrt{s^2 - h^2 r^2} dr
 \end{aligned}$$

Und für $b \leq s < c$ ist

$$G_3(s) = \int_0^{\frac{s}{c}} 12 r (1-r)^2 dr + \int_{\frac{s}{c}}^1 12 (1-r)^2 \frac{1}{a} (\sqrt{s^2 - h^2 r^2} + r \sqrt{b^2 - h^2}) dr$$

Es ist

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{a} 12 (1-r)^2 \sqrt{s^2 - h^2 r^2} dr \\ &= \frac{\arcsin\left(\frac{hr}{s}\right) (3s^4 + 12h^2 s^2)}{2ah^3} \\ & \quad + \frac{\sqrt{s^2 - h^2 r^2} ((16-3r)s^2 + 6h^2 r^3 - 16h^2 r^2 + 12h^2 r)}{2ah^2} \end{aligned}$$

wie durch Differenzieren leicht bestätigt werden kann. Die anderen Integrale sind einfach zu berechnen, so dass wir (unter Berücksichtigung, dass $\sqrt{b^2 - h^2} = a - \sqrt{c^2 - h^2}$) Folgendes erhalten:

Satz 11 *Werden beim Prozess der Projektiven Reduktion die zwei zufällig in einer ebenen Figur gewählten Punkte in einer Teilprojektion jeweils auf die Ecke A und die gegenüberliegende Seite a eines $\triangle ABC$ projiziert mit Höhe h auf Seite a, $b \leq c$ und $\angle ABC < \frac{\pi}{2}$, so beträgt für diese Teilprojektion die (partielle) Verteilungsfunktion $G(s)$ des Abstandes s der beiden ursprünglichen Punkte:*

$$\begin{aligned} G(s) &= G_1(a, b, c, h, s) \\ &= \frac{3 \left(\pi - \arcsin\left(\frac{h}{c}\right) - \arcsin\left(\frac{h}{b}\right) \right) s^2 (s^2 + 4h^2)}{2ah^3} \\ & \quad + \frac{\sqrt{c^2 - h^2} ((3b^2 - 3c^2) s^4 + (16bc^2 - 16b^2c) s^3)}{2ab^2c^2h^2} \\ & \quad + \frac{3s^4 - 16bs^3}{2b^2h^2} \\ & \text{für } s \leq h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(s) &= G_2(a, b, c, h, s) \\ &= \frac{3 \left(2 \arcsin\left(\frac{h}{s}\right) - \arcsin\left(\frac{h}{c}\right) - \arcsin\left(\frac{h}{b}\right) \right) s^2 (s^2 + 4h^2)}{2ah^3} \\ & \quad + \frac{\sqrt{s^2 - h^2} (13s^2 + 2h^2)}{ah^2} \\ & \quad + \frac{\sqrt{c^2 - h^2} ((3b^2 - 3c^2) s^4 + (16bc^2 - 16b^2c) s^3)}{2ab^2c^2h^2} \\ & \quad + \frac{3s^4 - 16bs^3}{2b^2h^2} \\ & \text{für } h < s \leq b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(s) &= G_3(a, b, c, h, s) \\
 &= \frac{3 \left(\arcsin\left(\frac{h}{s}\right) - \arcsin\left(\frac{h}{c}\right) \right) s^2 (s^2 + 4h^2)}{2ah^3} \\
 &\quad + \frac{\sqrt{s^2 - h^2} (13s^2 + 2h^2)}{2ah^2} \\
 &\quad + \frac{\sqrt{c^2 - h^2} (3s^4 - 16cs^3 - 2c^2h^2)}{2ac^2h^2} \\
 &\quad + 1 \\
 &\text{für } b < s \leq c
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 G(s) &= G_4(a, b, c, h, s) = 1 \\
 &\text{für } s > c
 \end{aligned}$$

(partial distribution: point to line picking 1)

Für den Fall $\frac{\pi}{2} \leq \angle ACB$ (siehe Abbildung 15) bezeichnen wir Verteilungsfunktionen mit $H_P(s)$ und $H(s)$.

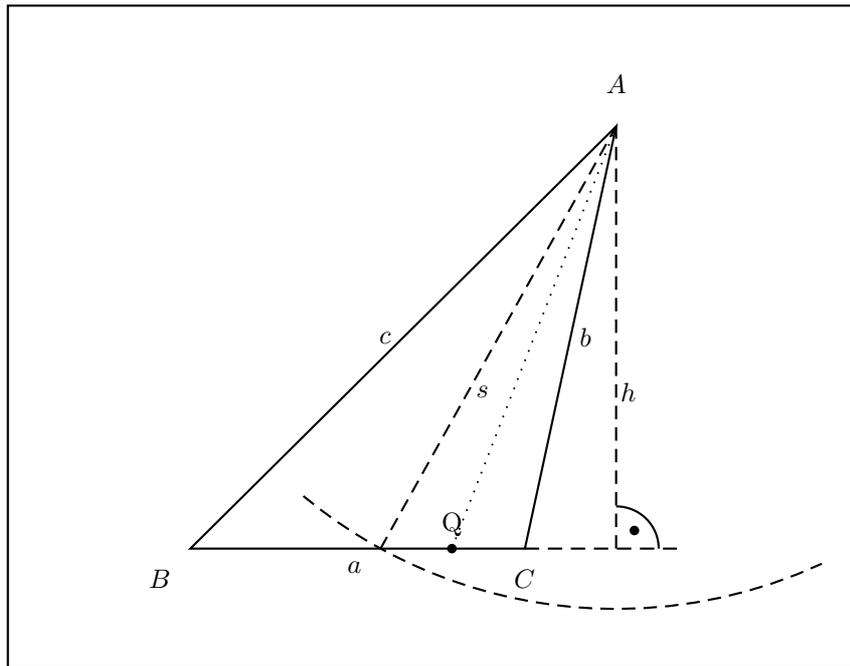


Abbildung 15: Verteilungsfunktion im Dreieck, Fall 2

Es ergibt sich folgende Berechnung:

$$H_P(s) = \begin{cases} 0 & \text{für } s < b \\ \frac{1}{a}(\sqrt{s^2 - h^2} - \sqrt{b^2 - h^2}) & \text{für } b \leq s \leq c \\ 1 & \text{für } c < s \end{cases}$$

Daher ist

$$H_P\left(\frac{s}{r}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{s}{b} < r \\ \frac{1}{a}(\sqrt{(\frac{s}{r})^2 - h^2} - \sqrt{b^2 - h^2}) & \text{für } \frac{s}{c} < r \leq \frac{s}{b} \\ 1 & \text{für } r < \frac{s}{c} \end{cases}$$

Somit erhalten wir die Verteilungsfunktion $H(s)$ für den Abstand der ursprünglichen Punkte:

$$\begin{aligned} H(s) &= \int_0^\infty f_r(r) H_P\left(\frac{s}{r}\right) dr \\ &= \int_0^{\frac{s}{c}} f_r(r) dr \\ &\quad + \int_{\frac{s}{c}}^{\frac{s}{b}} f_r(r) \frac{1}{a} (\sqrt{(\frac{s}{r})^2 - h^2} - \sqrt{b^2 - h^2}) dr \end{aligned}$$

Damit ist für $s < b$

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \int_0^{\frac{s}{c}} 12 r (1-r)^2 dr \\ &\quad + \int_{\frac{s}{c}}^{\frac{s}{b}} 12 (1-r)^2 \frac{1}{a} (\sqrt{s^2 - h^2 r^2} - r \sqrt{b^2 - h^2}) dr \end{aligned}$$

Und für $b \leq s \leq c$

$$\begin{aligned} H_2(s) &= \int_0^{\frac{s}{c}} 12 r (1-r)^2 dr \\ &\quad + \int_{\frac{s}{c}}^1 12 (1-r)^2 \frac{1}{a} (\sqrt{s^2 - h^2 r^2} - r \sqrt{b^2 - h^2}) dr \end{aligned}$$

Somit ergibt sich konkret

Satz 12 Werden beim Prozess der Projektiven Reduktion die zwei zufällig in einer ebenen Figur gewählten Punkte in einer Teilprojektion jeweils auf die Ecke A und die gegenüberliegende Seite a eines $\triangle ABC$ projiziert mit Höhe h auf Seite a , $b \leq c$ und $\frac{\pi}{2} \leq \angle ABC$, so beträgt für diese Teilprojektion die (partielle) Verteilungsfunktion $H(s)$ des Abstandes s der beiden ursprünglichen Punkte:

$$\begin{aligned} H(s) &= H_1(a, b, c, h, s) \\ &= \frac{3 \left(\arcsin\left(\frac{h}{b}\right) - \arcsin\left(\frac{h}{c}\right) \right) s^2 (s^2 + 4h^2)}{2 a h^3} \\ &\quad + \frac{\sqrt{c^2 - h^2} \left((3b^2 - 3c^2) s^4 + (16bc^2 - 16b^2c) s^3 \right)}{2 a b^2 c^2 h^2} \\ &\quad + \frac{3s^4 - 16bs^3}{2b^2h^2} \\ &\text{für } s \leq b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(s) &= H_2(a, b, c, h, s) \\
&= \frac{3 \left(\arcsin\left(\frac{h}{s}\right) - \arcsin\left(\frac{h}{c}\right) \right) s^2 (s^2 + 4h^2)}{2ah^3} \\
&\quad + \frac{\sqrt{s^2 - h^2} (13s^2 + 2h^2)}{2h^2} \\
&\quad + \frac{\sqrt{c^2 - h^2} (3s^4 - 16cs^3 - 2c^2h^2)}{2ac^2h^2} \\
&\quad + 1 \\
&\text{für } b < s \leq c
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
H(s) &= H_3(a, b, c, h, s) = 1 \\
&\text{für } s > c
\end{aligned}$$

(partial distribution: point to line picking 2)

Schließlich errechnen wir der Vollständigkeit halber an dieser Stelle noch die partielle Verteilungsfunktion $I(s)$ für die Projektion der beiden Punkte auf zwei parallele Strecken. Um dem Leser übermäßige Fallunterscheidungen zu ersparen, gehen wir dabei vereinfachend davon aus, dass es sich um zwei Seiten eines Rechtecks mit der Länge a und der Höhe h handelt; dies reicht aus, um beispielsweise später die Verteilungsfunktion im regulären Sechseck zu berechnen.

Da die Projektion auf parallele Strecken nur zwei Projektionsschritte erfordert, ergibt sich für den Gesamtreduktionsfaktor r eine andere Verteilungs- und Dichtefunktion.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
F_{r1}(r_1) &= r_1^4; & f_{r1}(r_1) &= 4r_1^3; \\
F_{r2}(r_2) &= r_2^3; & f_{r2}(r_2) &= 3r_2^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_r(r) &= P(r_1 r_2 < r) \\
&= P(r_1 < r) + P(r_1 > r)P(r_1 r_2 < r \mid r_1 > r) \\
&= F_{r1}(r) + \int_{r_1=r}^1 f_{r1}(r_1) F_{r2}\left(\frac{r}{r_1}\right) dr_1 \\
&= r^4 + \int_{r_1=r}^1 4r_1^3 \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 dr_1 \\
&= 4r^3 - 3r^4
\end{aligned}$$

Somit ist

$$f_r(r) = F_r'(s) = \begin{cases} 12r^2(1-r) & \text{für } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{für } r \geq 1 \end{cases}$$

Die Berechnung der Verteilungsfunktion $I(s)$ des Abstandes der Projektionspunkte Q_1 und Q_2 veranschaulichen wir anhand der Abbildung 16.

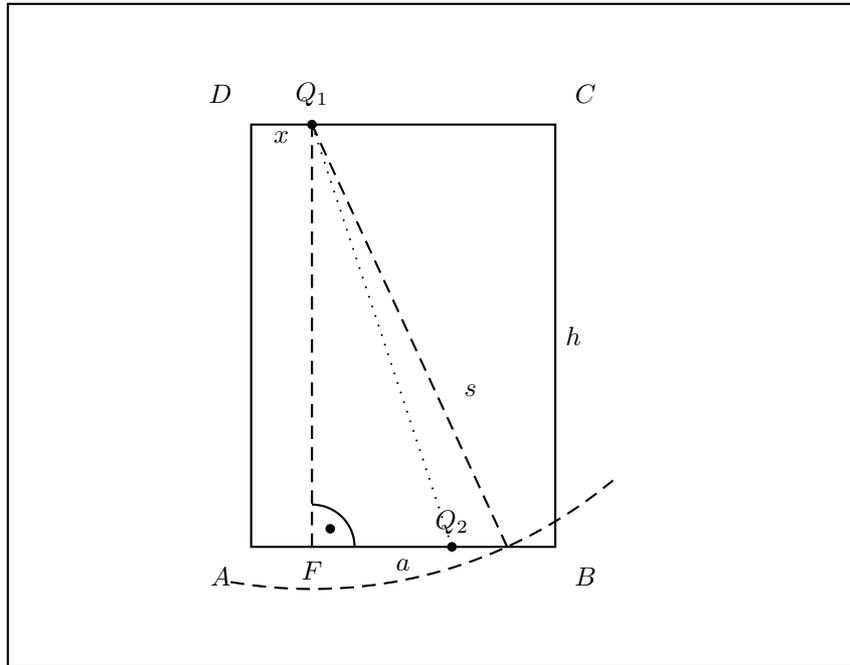


Abbildung 16: Verteilungsfunktion bei parallelen Strecken

Da Q_1 und Q_2 auf \overline{CD} und \overline{AB} gleichverteilt sind, ergibt bei gegebener Lage von Q_1 die Abdeckung der Strecke $a = \overline{AB}$ durch den Kreis um Q_1 mit Radius s den Wert für $P(\overline{Q_1Q_2} \leq s)$. Den Wert bei zufälliger Wahl von Q_1 auf \overline{CD} erhält man dann durch Integration über $x = \overline{DQ_1}$. Wegen der Symmetrie der Figur reicht es zudem nur die linksseitige Überdeckung der Strecke \overline{AB} bis zum Fußpunkt F zu berechnen und den Wert dann zu verdoppeln. Somit erhalten wir für $h \leq s \leq \sqrt{a^2 + h^2}$:

$$I_P(s) = 2 \left(\int_0^{\sqrt{s^2 - h^2}} \frac{1}{a} \frac{x}{a} dx + \int_{\sqrt{s^2 - h^2}}^a \frac{1}{a} \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{a} dx \right) \\ = \frac{2a \sqrt{s^2 - h^2} - s^2 + h^2}{a^2}$$

Also ist

$$I_P(s) = \begin{cases} 0 & \text{für } s < h \\ \frac{2a \sqrt{s^2 - h^2} - s^2 + h^2}{a^2} & \text{für } h \leq s \leq \sqrt{a^2 + h^2} \\ 1 & \text{für } \sqrt{a^2 + h^2} < s \end{cases}$$

Daher ist

$$I_P\left(\frac{s}{r}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{s}{h} < r \\ \frac{2a \sqrt{(\frac{s}{r})^2 - h^2 - (\frac{s}{r})^2 + h^2}}{a^2} & \text{für } \frac{s}{\sqrt{a^2 + h^2}} \leq r \leq \frac{s}{h} \\ 1 & \text{für } r < \frac{s}{\sqrt{a^2 + h^2}} \end{cases}$$

Somit erhalten wir die Verteilungsfunktion $I(s)$ für den Abstand der ursprünglichen Punkte:

$$\begin{aligned} I(s) &= \int_0^\infty f_r(r) I_P\left(\frac{s}{r}\right) dr \\ &= \int_0^{\frac{s}{\sqrt{a^2+h^2}}} f_r(r) dr \\ &\quad + \int_{\frac{s}{\sqrt{a^2+h^2}}}^{\frac{s}{h}} f_r(r) \frac{2a \sqrt{\left(\frac{s}{r}\right)^2 - h^2} - \left(\frac{s}{r}\right)^2 + h^2}{a^2} dr \end{aligned}$$

Somit ist für $s \leq h$:

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \int_0^{\frac{s}{\sqrt{a^2+h^2}}} 12 r^2 (1-r) dr \\ &\quad + \int_{\frac{s}{\sqrt{a^2+h^2}}}^{\frac{s}{h}} 12 (1-r) \frac{2a r \sqrt{s^2 - h^2 r^2} - s^2 + h^2 r^2}{a^2} dr \end{aligned}$$

Und für $h < s \leq \sqrt{a^2 + h^2}$

$$\begin{aligned} I_2(s) &= \int_0^{\frac{s}{\sqrt{a^2+h^2}}} 12 r^2 (1-r) dr \\ &\quad + \int_{\frac{s}{\sqrt{a^2+h^2}}}^1 12 (1-r) \frac{2a r \sqrt{s^2 - h^2 r^2} - s^2 + h^2 r^2}{a^2} dr \end{aligned}$$

Durch Berechnung der bestimmten Integrale ergibt sich somit

Satz 13 Werden beim Prozess der Projektiven Reduktion die zwei zufällig in einer ebenen Figur gewählten Punkte in einer Teilprojektion auf jeweils parallele Seiten der Länge a eines Rechtecks mit den Seiten a und h projiziert, so beträgt für diesen Fall die (partielle) Verteilungsfunktion $I(s)$ des Abstandes s der beiden ursprünglichen Punkte:

$$\begin{aligned} I(s) &= I_1(a, h, s) \\ &= \frac{3 \arcsin\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\right) - 3 \frac{\pi}{2}}{a h^3} s^4 + \frac{8 \sqrt{h^2+a^2} - 8 h}{a^2 h^2} s^3 \\ &\quad \text{für } s \leq h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(s) &= I_2(a, h, s) \\ &= \frac{3 a \arcsin\left(\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) - 3 a \arcsin\left(\frac{h}{s}\right) - 3 h}{a^2 h^3} s^4 \\ &\quad + \frac{8 \sqrt{h^2+a^2} s^3 + \sqrt{s^2-h^2} (2 a h^2 - 5 a s^2) - 6 h^2 s^2 + h^4}{a^2 h^2} \\ &\quad \text{für } h < s \leq \sqrt{a^2+h^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I(s) &= I_3(a, h, s) = 1 \\ &\quad \text{für } s > \sqrt{a^2+h^2} \end{aligned}$$

(partial distribution: parallel lines picking)

Beispiele

Das regelmäßige Fünfeck

Für das regelmäßige Fünfeck der Seitenlänge 1 hatten wir folgenden Erwartungswert erhalten:

$$E_5 = \frac{2}{15}(\sqrt{5} + 2)E_2\left(1, \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right) - \frac{2}{15}(\sqrt{5} - 1)E_2\left(1, 1, \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)$$

Unter Berücksichtigung des Gesamtreduktionsfaktor von $\frac{2}{5}$ ergibt sich nach Berechnung der jeweiligen Höhe der Dreiecke für die Verteilungsfunktion $F(s)$:

$$F(s) = \frac{1}{3}(\sqrt{5} + 2)G\left(1, \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2}, s\right) - \frac{1}{3}(\sqrt{5} - 1)H\left(1, 1, \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, s\right)$$

Damit ergibt sich für $0 < s \leq 1$

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \frac{1}{3}(\sqrt{5} + 2)G_1\left(1, \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2}, s\right) \\ &\quad - \frac{1}{3}(\sqrt{5} - 1)H_1\left(1, 1, \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, s\right) \\ &= \frac{s^4}{25} \left(\sqrt{5 - \sqrt{5}} (2\sqrt{10} - 6\sqrt{2}) \pi + 4\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \pi - 20\sqrt{5} + 50 \right) \\ &\quad - \frac{s^3}{15} (160 - 64\sqrt{5}) \\ &\quad + \frac{s^2}{25} \left(\sqrt{5 - \sqrt{5}} (2\sqrt{10} - 10\sqrt{2}) \pi + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} (8\sqrt{5} + 20) \pi \right) \end{aligned}$$

Für $1 < s \leq \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} F_2(s) &= \frac{1}{3}(\sqrt{5} + 2)G_1\left(1, \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2}, s\right) \\ &\quad - \frac{1}{3}(\sqrt{5} - 1)H_2\left(1, 1, \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, s\right) \\ &= \frac{1}{60} \sqrt{2} \sqrt{-5 - \sqrt{5} + 8s^2} \left(5 - 5\sqrt{5} - 26(-5 + 3\sqrt{5})s^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{6} (-3 + \sqrt{5}) + \frac{4}{25} s^2 \pi \left(\sqrt{5(25 - 2\sqrt{5})} + \sqrt{5(5 - 2\sqrt{5})} s^2 \right) \\ &\quad - \frac{4}{5} s^2 \left(2\sqrt{5(5 - 2\sqrt{5})} + \sqrt{50 - 22\sqrt{5}s^2} \right) \arcsin \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4s} \end{aligned}$$

Und für $\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} < s \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
F_3(s) &= \frac{1}{3}(\sqrt{5}+2)G_2\left(1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}, s\right) \\
&\quad - \frac{1}{3}(\sqrt{5}-1)H_2\left(1, 1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, s\right) \\
&= -\frac{1}{6}(-3+\sqrt{5}) + \frac{1}{15}\sqrt{-5-2\sqrt{5}+4s^2} \left(5(2+\sqrt{5}) + 26\sqrt{5}s^2\right) \\
&\quad - \frac{1}{60}\sqrt{2}\sqrt{-5-\sqrt{5}+8s^2} \left(5(-1+\sqrt{5}) + 26(-5+3\sqrt{5})s^2\right) \\
&\quad - \frac{2}{25}\pi s^2 \left(6\sqrt{5(5-2\sqrt{5})} - 2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}\right) \\
&\quad\quad + \left(3\sqrt{50-22\sqrt{5}} - 2\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right) s^2 \\
&\quad - \frac{8}{5}s^2 \left(\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} + \sqrt{5-2\sqrt{5}}s^2\right) \arcsin \frac{\sqrt{-5-2\sqrt{5}+4s^2}}{2s} \\
&\quad + \frac{4}{5}s^2 \left(2\sqrt{5(5-2\sqrt{5})} + \sqrt{50-22\sqrt{5}}s^2\right) \\
&\quad\quad \arcsin \frac{\sqrt{-10-2\sqrt{5}+16s^2}}{4s}
\end{aligned}$$

Errechnet man durch Differenzieren die Dichtefunktion $f(s)$, so kann man mittels numerischer Integration von $\int_0^{\sqrt{5}+1} s f(s) ds$ den Erwartungswert berechnen, der in diesem Falle exakt mit dem Wert aus Kapitel 3 übereinstimmt. Auch alle nachfolgend berechnete Verteilungsfunktionen wurden auf diese Weise in MAXIMA oder Mathematica verifiziert.

Das regelmäßige Sechseck

Für das regelmäßige Sechseck der Seitenlänge 1 hatten wir folgenden Erwartungswert erhalten:

$$E_6 = \frac{16}{45}E_2(1, \sqrt{3}, 2) - \frac{2}{45}E_2(1, 1, \sqrt{3}) + \frac{2}{15}E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{DE})$$

Unter Berücksichtigung des Gesamtreduktionsfaktor von $\frac{2}{5}$ für die ersten beiden partiellen Erwartungswerte und $\frac{3}{5}$ für den dritten Erwartungswert (der der Projektion auf zwei gegenüberliegenden, parallelen Seiten des Rechtecks entspricht) ergibt sich nach Berechnung der jeweiligen Höhen der Dreiecke für die Verteilungsfunktion $F(s)$:

$$F(s) = \frac{8}{9}H(1, \sqrt{3}, 2, \sqrt{3}, s) - \frac{1}{9}H(1, 1, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, s) + \frac{2}{9}I(1, \sqrt{3}, s)$$

Damit ergibt sich für $0 < s \leq 1$

$$F_1(s) = \frac{8}{9}H_1(1, \sqrt{3}, 2, \sqrt{3}, s) - \frac{1}{9}H_1(1, 1, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, s) + \frac{2}{9}I_1(1, \sqrt{3}, s)$$

$$= \frac{(9 - \sqrt{3}\pi) s^4 - 48 s^3 + 18\sqrt{3}\pi s^2}{81}$$

Für $1 < s \leq \sqrt{3}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} F_2(s) &= \frac{8}{9} H_1(1, \sqrt{3}, 2, \sqrt{3}, s) - \frac{1}{9} H_2(1, 1, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, s) + \frac{2}{9} I_1(1, \sqrt{3}, s) \\ &= \frac{(\sqrt{3}\pi - 4\sqrt{3} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2s}) s^4 + (10\sqrt{3}\pi - 12\sqrt{3} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2s}) s^2}{27} \\ &\quad - \frac{\sqrt{4s^2 - 3} (26s^2 + 3)}{54} + \frac{1}{18} \end{aligned}$$

und für $\sqrt{3} < s \leq 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} F_3(s) &= \frac{8}{9} H_2(1, \sqrt{3}, 2, \sqrt{3}, s) - \frac{1}{9} H_3(1, 1, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, s) + \frac{2}{9} I_2(1, \sqrt{3}, s) \\ &= \frac{(6\sqrt{3} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{s} - 2\sqrt{3}\pi - 9) s^4}{81} \\ &\quad + \frac{(144\sqrt{3} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{s} - 48\sqrt{3}\pi - 108) s^2}{81} \\ &\quad + \frac{\sqrt{s^2 - 3} (126s^2 + 108) + 45}{81} \end{aligned}$$

6.3 Die Verteilungsfunktion im beliebigen Dreieck

Mit den Vorergebnissen lässt sich die Verteilungsfunktion in einem beliebigen Dreieck nun einfach berechnen. Nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass $a \leq b \leq c$. Es sei A der Flächeninhalt des Dreiecks.

Dann gilt für die Höhen des Dreiecks: $h_c = \frac{2A}{c} \leq h_b = \frac{2A}{b} \leq h_a = \frac{2A}{a}$. Da in einem Dreieck nur höchstens eine Seite kleiner sein kann als eine der Höhen, gibt es also nur diese beiden Möglichkeiten:

Entweder ist $h_c \leq h_b \leq h_a \leq a \leq b \leq c$ oder $h_c \leq h_b \leq a < h_a \leq b \leq c$, was wir weiter unten beim allseits spitzwinkligen Dreieck noch benötigen werden.

Die Gesamtverteilungsfunktion des Abstandes nennen wir $D(s)$. Wie oben dargestellt, setzt sich diese zu je einem Drittel aus der Verteilungsfunktion der Teilprojektionen mit einem Bildpunkt an einer Ecke und dem anderen Bildpunkt auf der gegenüberliegenden Seite zusammen. Um die konkrete Funktion zu bestimmen benötigen wir eine entsprechende Fallunterscheidung.

Fall des stumpfwinkligen Dreiecks

Da $h_c \leq a \leq b < c$ setzt sich im stumpfwinkligen Dreieck die Verteilungsfunktion $D_A(s)$ wie folgt zusammen:

Für $0 \leq s < h_c = \frac{2A}{c}$ ist

$$D_{A1}(s) = \frac{1}{3} H_1(a, b, c, \frac{2A}{a}, s) + \frac{1}{3} H_1(b, a, c, \frac{2A}{b}, s) + \frac{1}{3} G_1(c, a, b, \frac{2A}{c}, s)$$

für $h_c = \frac{2A}{c} \leq s < a$ ist

$$D_{A2}(s) = \frac{1}{3}H_1(a, b, c, \frac{2A}{a}, s) + \frac{1}{3}H_1(b, a, c, \frac{2A}{b}, s) + \frac{1}{3}G_2(c, a, b, \frac{2A}{c}, s)$$

für $a \leq s < b$ ist

$$D_{A3}(s) = \frac{1}{3}H_1(a, b, c, \frac{2A}{a}, s) + \frac{1}{3}H_2(b, a, c, \frac{2A}{b}, s) + \frac{1}{3}G_3(c, a, b, \frac{2A}{c}, s)$$

und für $b \leq s \leq c$ ist

$$D_{A4}(s) = \frac{1}{3}H_2(a, b, c, \frac{2A}{a}, s) + \frac{1}{3}H_2(b, a, c, \frac{2A}{b}, s) + \frac{1}{3}$$

Fall des spitzwinkligen Dreiecks mit $h_a \leq a$

Die Verteilungsfunktion $D_B(s)$ setzt sich wie folgt zusammen:

Für $0 \leq s < h_c = \frac{2A}{c}$ ist

$$D_{B1}(s) = \frac{1}{3}G_1(a, b, c, \frac{2A}{a}, s) + \frac{1}{3}G_1(b, a, c, \frac{2A}{b}, s) + \frac{1}{3}G_1(c, a, b, \frac{2A}{c}, s)$$

für $\frac{2A}{c} \leq s < h_b = \frac{2A}{b}$ ist

$$D_{B2}(s) = \frac{1}{3}G_1(a, b, c, \frac{2A}{a}, s) + \frac{1}{3}G_1(b, a, c, \frac{2A}{b}, s) + \frac{1}{3}G_2(c, a, b, \frac{2A}{c}, s)$$

für $\frac{2A}{b} \leq s < h_a = \frac{2A}{a}$ ist

$$D_{B3}(s) = \frac{1}{3}G_1(a, b, c, \frac{2A}{a}, s) + \frac{1}{3}G_2(b, a, c, \frac{2A}{b}, s) + \frac{1}{3}G_2(c, a, b, \frac{2A}{c}, s)$$

für $\frac{2A}{a} = \frac{2A}{c} \leq s < a$ ist

$$D_{B4}(s) = \frac{1}{3}G_2(a, b, c, \frac{2A}{a}, s) + \frac{1}{3}G_2(b, a, c, \frac{2A}{b}, s) + \frac{1}{3}G_2(c, a, b, \frac{2A}{c}, s)$$

für $a \leq s < b$ ist

$$D_{B5}(s) = \frac{1}{3}G_2(a, b, c, \frac{2A}{a}, s) + \frac{1}{3}G_3(b, a, c, \frac{2A}{b}, s) + \frac{1}{3}G_3(c, a, b, \frac{2A}{c}, s)$$

und für $b \leq s \leq c$ ist

$$D_{B6}(s) = \frac{1}{3}G_3(a, b, c, \frac{2A}{a}, s) + \frac{1}{3}G_3(b, a, c, \frac{2A}{b}, s) + \frac{1}{3}$$

Fall des spitzwinkligen Dreiecks mit $h_a > a$

Die Verteilungsfunktion $D_C(s)$ setzt sich wie folgt zusammen:

Für $0 \leq s < h_c = \frac{2A}{c}$ ist

$$D_{C1}(s) = \frac{1}{3}G_1(a, b, c, \frac{2A}{a}, s) + \frac{1}{3}G_1(b, a, c, \frac{2A}{b}, s) + \frac{1}{3}G_1(c, a, b, \frac{2A}{c}, s)$$

für $\frac{2A}{c} \leq s < h_b = \frac{2A}{b}$ ist

$$D_{C2}(s) = \frac{1}{3}G_1(a, b, c, \frac{2A}{a}, s) + \frac{1}{3}G_1(b, a, c, \frac{2A}{b}, s) + \frac{1}{3}G_2(c, a, b, \frac{2A}{c}, s)$$

für $\frac{2A}{b} \leq s < a$ ist

$$D_{C3}(s) = \frac{1}{3}G_1(a, b, c, \frac{2A}{a}, s) + \frac{1}{3}G_2(b, a, c, \frac{2A}{b}, s) + \frac{1}{3}G_2(c, a, b, \frac{2A}{c}, s)$$

für $a \leq s < h_a = \frac{2A}{a}$ ist

$$D_{C4}(s) = \frac{1}{3}G_1(a, b, c, \frac{2A}{a}, s) + \frac{1}{3}G_3(b, a, c, \frac{2A}{b}, s) + \frac{1}{3}G_3(c, a, b, \frac{2A}{c}, s)$$

für $\frac{2A}{a} \leq s < b$ ist

$$D_{C5}(s) = \frac{1}{3}G_2(a, b, c, \frac{2A}{a}, s) + \frac{1}{3}G_3(b, a, c, \frac{2A}{b}, s) + \frac{1}{3}G_3(c, a, b, \frac{2A}{c}, s)$$

und für $b \leq s \leq c$ ist

$$D_{C6}(s) = \frac{1}{3}G_3(a, b, c, \frac{2A}{a}, s) + \frac{1}{3}G_3(b, a, c, \frac{2A}{b}, s) + \frac{1}{3}$$

Beispiele

Die Verteilungsfunktion für den Abstand s zweier Punkte eines rechteckigen, gleichschenkeligen Dreiecks mit Kathetenlänge 1 beträgt

für $0 \leq s < h_c = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} F_1(s) = D_{A1}(s) &= 2 \frac{1}{3}H_1(1, 1, \sqrt{2}, 1, s) + \frac{1}{3}G_1(\sqrt{2}, 1, 1, \frac{1}{2}\sqrt{2}, s) \\ &= \frac{(9\pi + 18)s^4 + (-32\sqrt{2} - 64)s^3 + 24\pi s^2}{12} \end{aligned}$$

für $\sqrt{\frac{1}{2}} \leq s < 1 = a = b$

$$\begin{aligned} F_2(s) = D_{A2}(s) &= 2 \frac{1}{3}H_2(1, 1, \sqrt{2}, 1, s) + \frac{1}{3}G_2(\sqrt{2}, 1, 1, \frac{1}{2}\sqrt{2}, s) \\ &= \frac{\left(24 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}s} - 3\pi + 18\right) s^4 + 48 s^2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}s}}{12} \\ &\quad + \frac{\sqrt{2s^2 - 1} (13s^2 + 1) - (8\sqrt{2} + 16) s^3}{3} \end{aligned}$$

und für $1 \leq s \leq \sqrt{2} = c$

$$\begin{aligned} F_3(s) = D_{A4} &= 2 \frac{1}{3}H_2(1, 1, \sqrt{2}, 1, s) + \frac{1}{3} \\ &= \frac{(12 \arcsin \frac{1}{s} - 3\pi + 6) (s^4 + 4s^2)}{12} \\ &\quad + \frac{-8\sqrt{2}s^3 + \sqrt{s^2 - 1} (13s^2 + 2) - 6s^2 + 1}{3} \end{aligned}$$

Das gleichseitige Dreieck mit der Seitenlänge 1 führt zu: für $0 \leq s < \frac{\sqrt{3}}{2} = h_c = h_b = h_a$ ist

$$F_1(s) = D_{B_1}(s) = \frac{(4\pi + 6\sqrt{3})s^4 - 32\sqrt{3}s^3 + 12\pi s^2}{3\sqrt{3}}$$

für $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq s \leq 1 = a = b = c$ ist

$$F_2(s) = D_{B_4}(s) = \frac{(24\sqrt{3} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2s} - 8\sqrt{3}\pi + 18)(s^4 + 3s^2)}{9} + \frac{-32s^3 + \sqrt{4s^2 - 3}(26s^2 + 3) - 18s^2}{3}$$

7 Der mittlere Abstand der Punkte im regulären Tetraeder

Satz 2 ist ohne Einschränkungen auf die Figur des regulären Tetraeders, also des gleichseitigen Tetraeders $ABCD$ mit Kantenlänge 1, wiederholt mit wechselndem Projektionszentrum (wie markiert) anwendbar:

$$\begin{aligned}
& E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \widehat{ABCD} \wedge Q_2 \in \widehat{ABCD}) \\
& \stackrel{(Z=D)}{=} \frac{3}{7} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \triangle ABC \wedge Q_2 \in \widehat{ABCD}) \\
& \quad + \frac{3}{7} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \widehat{ABCD} \wedge Q_2 \in \triangle ABC) \\
& = \frac{6}{7} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \triangle ABC \wedge Q_2 \in \widehat{ABCD}) \\
& \stackrel{(Z=C)}{=} \frac{6}{7} \frac{2}{6} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \widehat{ABCD}) \\
& \quad + \frac{6}{7} \frac{3}{6} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \triangle ABC \wedge Q_2 \in \triangle ABD) \\
& = \frac{2}{7} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \widehat{ABCD}) \\
& \quad + \frac{3}{7} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \triangle ABC \wedge Q_2 \in \triangle ABD) \\
& \stackrel{(Z=B)}{=} \frac{2}{7} \frac{1}{5} E(\overline{AQ} \mid Q \in \widehat{ABCD}) \\
& \quad + \frac{2}{7} \frac{3}{5} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \triangle ACD) \\
& \quad + \frac{3}{7} \frac{2}{5} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AC} \wedge Q_2 \in \widehat{ABD}) \\
& \quad + \frac{3}{7} \frac{2}{5} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \triangle ABC \wedge Q_2 \in \overline{AD}) \\
& = \frac{2}{35} E(\overline{AQ} \mid Q \in \widehat{ABCD}) \\
& \quad + \frac{18}{35} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \triangle ACD) \\
& \stackrel{(Z=A)}{=} \frac{2}{35} \frac{3}{4} E(\overline{AQ} \mid Q \in \triangle BCD) \\
& \quad + \frac{18}{35} \frac{1}{4} E(\overline{BQ} \mid Q \in \triangle ACD) \\
& \quad + \frac{18}{35} \frac{2}{4} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CD}) \\
& = \frac{6}{35} E(\overline{DQ} \mid Q \in \triangle ABC) \\
& \quad + \frac{9}{35} E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \overline{AB} \wedge Q_2 \in \overline{CD})
\end{aligned}$$

So vereinfacht sich nach 4 Projektionsschritten der Erwartungswert zweier zufällig gewählter Punkte im Tetraeder mit insgesamt 6 Freiheitsgraden zu der Summe zweier Erwartungswerte aus einfachen Figuren mit nur jeweils 2 Freiheitsgraden.

Der erste Erwartungswert lässt sich auf zwei Arten einfach berechnen (siehe

Zeichung 17):

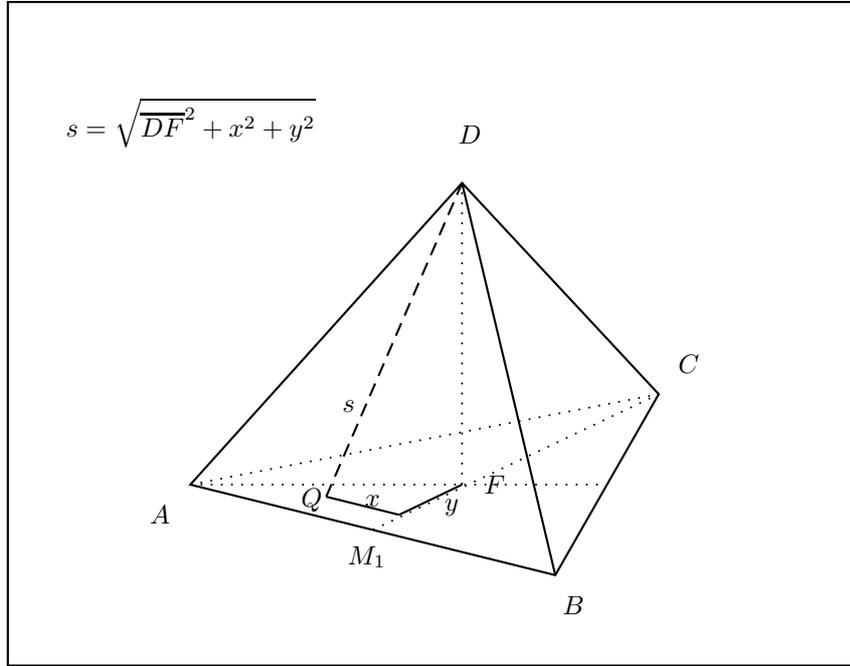


Abbildung 17: Zum Erwartungswert der ersten Teilprojektion

So könnte zum einen einfach über die x - und y -Koordinaten integriert werden, wodurch wir

$$E_a = \frac{1}{A(\triangle AM_1F)} \int_{y=0}^{\frac{\sqrt{3}}{6}} \int_{x=0}^{\sqrt{3}y} \sqrt{DF^2 + x^2 + y^2} dx dy$$

erhalten.

Für spätere Berechnungen bietet sich jedoch an, über die Länge der Strecke $d = \overline{FQ}$ zu integrieren. Aus der Gleichverteilung von Q in $\triangle ABC$ ergibt sich aus geometrischer Anschauung für die Strecke d folgende Verteilungsfunktion

$$F_d(d) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}}\pi s^2 & \text{für } 0 \leq d \leq \sqrt{\frac{1}{12}} \\ \frac{\sqrt{12d^2-1} + 4d^2(\pi - 3\arctan\sqrt{12d^2-1})}{\sqrt{3}} & \text{für } \sqrt{\frac{1}{12}} < d \leq \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 1 & \text{für } \sqrt{\frac{1}{3}} < d \end{cases}$$

Da $d = \sqrt{s^2 - 2/3}$ und ergibt sich in der Projektion a durch entsprechendes

Einsetzen für s folgende Verteilung:

$$T_{Pa}(s) = \begin{cases} 0 & \text{für } s \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{4}{\sqrt{3}}\pi \left(s^2 - \frac{2}{3}\right) & \text{für } \sqrt{\frac{2}{3}} < s \leq \sqrt{\frac{3}{4}} \\ \frac{3\sqrt{12s^2-9} + (12s^2-8)(\pi - 3\arctan\sqrt{12s^2-9})}{3\sqrt{3}} & \text{für } \sqrt{\frac{3}{4}} < s \leq 1 \\ 1 & \text{für } 1 < s \end{cases}$$

Daraus leitet sich die entsprechende Dichtefunktion ab:

$$t_{Pa}(s) = \begin{cases} 0 & \text{für } s \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{8\pi s}{\sqrt{3}} & \text{für } \sqrt{\frac{2}{3}} < s \leq \sqrt{\frac{3}{4}} \\ \frac{8s(\pi - 3\arctan[\sqrt{12s^2-9}])}{\sqrt{3}} & \text{für } \sqrt{\frac{3}{4}} < s \leq 1 \\ 0 & \text{für } 1 < s \end{cases}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} E_a &= \int_0^1 s * t_{Pa}(s) ds \\ &= \frac{1}{108} \left(36 - 64\sqrt{2}\pi + 192\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}) + 75\ln(3) \right) \end{aligned}$$

Den zweiten Erwartungswert erhalten wir aus einfacher Integration über x und y (siehe Zeichnung 18):

$$\begin{aligned} E_b &= 4 \int_{y=0}^{\frac{1}{2}} \int_{x=0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{M_1 M_2^2 + x^2 + y^2} dx dy \\ &= 4 \int_{y=0}^{\frac{1}{2}} \int_{x=0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + x^2 + y^2} dx dy \\ &= \int_{y=0}^{\frac{1}{2}} \frac{(4y^2 + 2) \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{4y^2+2}}\right) + \sqrt{4y^2+3}}{2} dy \\ &= \left[-\frac{1}{3}\sqrt{2} \arctan \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{4x^2+3}} + \frac{2x^3+3x}{3} \operatorname{arsinh} \frac{\sqrt{2}\sqrt{2x^2+1}}{4x^2+2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{7}{12} \operatorname{arsinh}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{3}x\sqrt{4x^2+3} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{-24\sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}) + 21 \ln(3) + 6\sqrt{2}\pi + 12}{36} \end{aligned}$$

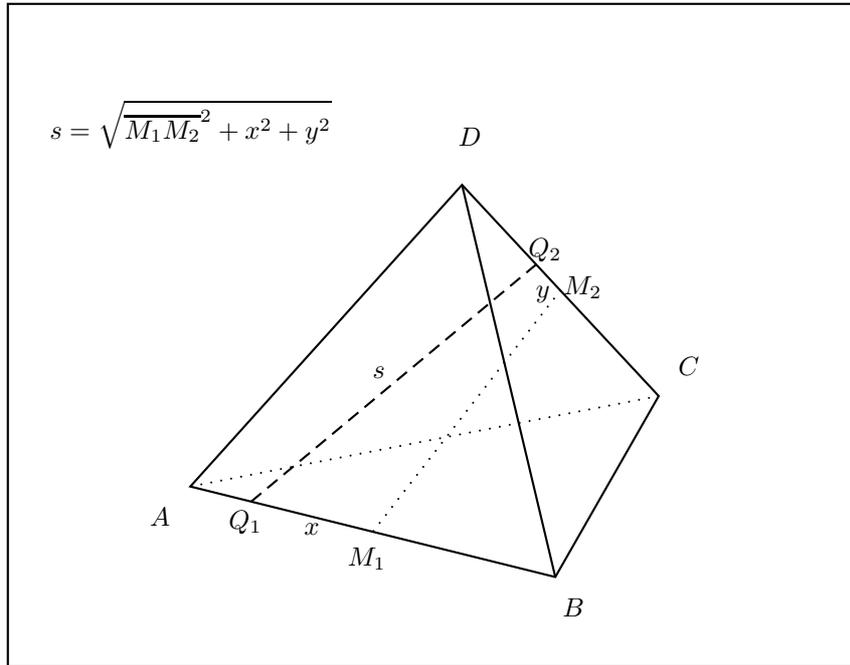


Abbildung 18: Zum Erwartungswert der zweiten Teilprojektion

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 E(\overline{Q_1 Q_2} \mid Q_1 \in \widehat{ABCD} \wedge Q_2 \in \widehat{ABCD}) &= \frac{6}{35} E_a + \frac{9}{35} E_b \\
 &= \frac{168 \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}) + 339 \ln(3) - 74 \sqrt{2} \pi + 180}{1260} \\
 &\approx 0.3576411722304 \dots
 \end{aligned}$$

7.1 Verteilungsfunktion

Die Berechnung der Verteilungsfunktion $T(s)$ des Abstandes der Punkte erfolgt gemäß Satz 10 mithilfe der Verteilungsfunktion der beiden Projektionsfiguren, es gilt also unter Berücksichtigung des Wahrscheinlichkeit von 2:3, dass

$$T(s) = \frac{2}{5} \int_0^1 f_r(r) T_{Pa}(s/r) dr + \frac{3}{5} \int_0^1 f_r(r) T_{Pb}(s/r) dr \tag{7}$$

wobei $f_r(r)$ die Dichtefunktion des Gesamtstreckfaktors r und T_{Pa} und T_{Pb} die jeweiligen Verteilungsfunktionen der beiden Projektionsfälle darstellen. Die Verteilungsfunktion $T_{Pa}(s)$ wurde schon oben hergeleitet, $T_{Pb}(s)$ ergibt sich

zwanglos durch $s^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + 1/2}$ mit x, y gleichverteilt in $[0; 1/2]$ zu:

$$T_{Pb}(s) = \begin{cases} 0 & \text{für } s \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \pi(s^2 - 1/2) & \text{für } \sqrt{\frac{1}{2}} < s \leq \sqrt{\frac{3}{4}} \\ \sqrt{4s^2 - 3} + (2s^2 - 1) & \\ (\operatorname{arccsc}\sqrt{4s^2 - 2} - \arctan\sqrt{4s^2 - 3}) & \text{für } \sqrt{\frac{3}{4}} < s \leq 1 \\ 1 & \text{für } 1 < s \end{cases}$$

Und schließlich ist $f_r(r) = 60r^2(1-r)^3$, was sich analog zur Dichtefunktion im 2-Dimensionalen herleitet.

Setzt man all dies in Gleichung (7) ein, so erhält man nach aufwändigem Umformen letztlich folgende Verteilungsfunktion für den Abstand der Punkte in einem regelmäßigen Tetraeder der Seitenlänge 1:

Für $0 \leq s < \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist

$$T_1(s) = -\frac{1}{5}s^3 \left(\pi \left(-280\sqrt{2} + 90\sqrt{3}s - 288\sqrt{2}s^2 + 25\sqrt{3}s^3 \right) + 6 \left(40\sqrt{2}\pi + 5s^3 + 24s^2 \left(-2 + 2\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}\arctan\sqrt{2} \right) \right) \right)$$

für $\sqrt{\frac{1}{2}} \leq s < \sqrt{\frac{2}{3}}$ ist

$$T_2(s) = \pi \left(-\frac{3}{10} + 9s^2 + 32\sqrt{2}s^3 - 18(-3 + \sqrt{3})s^4 + \frac{144\sqrt{2}s^5}{5} + (12 - 5\sqrt{3})s^6 \right) - \frac{6}{5}s^3 \left(40\sqrt{2}\pi + 5s^3 + 24s^2 \left(-2 + 2\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}\arctan\sqrt{2} \right) \right)$$

für $\sqrt{\frac{2}{3}} \leq s < \sqrt{\frac{3}{4}}$ ist

$$T_3(s) = \frac{1}{90}\pi \left(-27 - 32\sqrt{3} + 90(9 + 8\sqrt{3})s^2 + 1620(3 + \sqrt{3})s^4 + 90(12 + \sqrt{3})s^6 \right) - \frac{6}{5}s^3 \left(40\sqrt{2}\pi + 5s^3 + 24s^2 \left(-2 + 2\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}\arctan\sqrt{2} \right) \right)$$

und für $\sqrt{\frac{3}{4}} \leq s \leq 1$ ist

$$T_4(s) = \frac{6}{5}(48 - 5s)s^5 + \frac{1}{5}\sqrt{-3 + 4s^2}(5 - 258s^4) + \frac{1}{90}\pi \left(-27 - 32\sqrt{3} + 90(9 + 8\sqrt{3})s^2 - 4320\sqrt{2}s^3 + 1620(3 + \sqrt{3})s^4 - 5184\sqrt{2}s^5 + 90(12 + \sqrt{3})s^6 \right) + \frac{144}{5}\sqrt{2}s^5 \arctan\sqrt{2} + 6\sqrt{3}s^4(18 + 5s^2) \arctan\sqrt{-1 + \frac{4s^2}{3}} + \frac{96}{5}\sqrt{2}s^3(5 + 6s^2) \arctan\frac{\sqrt{-\frac{3}{2} + 2s^2}}{s}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{6}{5}(-1 + 30s^2 + 180s^4 + 40s^6) \arctan \sqrt{-3 + 4s^2} \\
& + \frac{48}{5} \sqrt{2} s^3 (10 + 9s^2) \arctan \frac{\sqrt{-6 + 8s^2}}{s} \\
& - \frac{2\sqrt{3}}{15} (-8 + 180s^2 + 810s^4 + 135s^6) \arctan \sqrt{-9 + 12s^2}
\end{aligned}$$

7.2 Erwartungswert beim Hypertetraeder

Beim vierdimensionalen Hypertetraeder kann der mittlere Abstand der Punkte mittels Projektiver Reduktion leider nur numerisch berechnet werden, da die entstehenden Integrale sich nicht in geschlossener Form darstellen lassen.

Zusätzlich zum dreidimensionalen Tetraeder $ABCD$ liegt im vierdimensionalen ein weiterer Punkt E vor, der zu allen anderen Punkten ebenfalls den Abstand 1 hat. Mit den Koordinaten $A(0|0|0|0)$, $B(1|0|0|0)$, $C(\frac{1}{2}|\sqrt{\frac{3}{4}}|0|0)$, $D(\frac{1}{2}|\sqrt{\frac{1}{12}}|\sqrt{\frac{2}{3}}|0)$ und $E(\frac{1}{2}|\sqrt{\frac{1}{12}}|\sqrt{\frac{1}{24}}|\sqrt{\frac{5}{8}})$ ist diese Bedingung erfüllt. Weitere wichtige Punkte für die unten durchgeführte Berechnung sind der Fußpunkt $F(\frac{1}{2}|\sqrt{\frac{1}{12}}|0|0)$ der Höhe des Tetraeder $ABCD$ sowie dessen Mittelpunkt $M(\frac{1}{2}|\sqrt{\frac{1}{12}}|\sqrt{\frac{1}{24}}|0)$. Insbesondere gilt $\overline{FM} = \sqrt{\frac{1}{24}}$ und $\overline{EM} = \sqrt{\frac{5}{8}}$.

Nach insgesamt 5 Reduktionsschritten mit jeweils wechselnden Eckpunkten als Streckzentren ergibt sich mittels mehrfacher Anwendung von Satz 2

$$\begin{aligned}
& E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \widehat{ABCDE} \wedge Q_2 \in \widehat{ABCDE}) \\
& = \frac{4}{63} E(\overline{EQ} | Q \in \widehat{ABCD}) \\
& + \frac{24}{63} E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \triangle ABC \wedge Q_2 \in \overline{DE})
\end{aligned}$$

Zur Berechnung des Erwartungswertes $E(\overline{Q_1 Q_2} | Q_1 \in \widehat{ABCDE} \wedge Q_2 \in \widehat{ABCDE})$ stellen wir uns die Projektion Q' des Punktes Q vom Mittelpunkt M des Tetraeders \widehat{ABCD} aus auf eine der Seitenflächen vor, wobei aus Symmetriegründen die Projektion auf das Dreieck $\triangle ABC$ angenommen werden kann. Für den Projektionsfaktor gilt die Verteilungsfunktion $F_r(r) = r^3$, also die Dichtefunktion $f_r(r) = 3r^2$. Da

$$\begin{aligned}
\overline{EQ} & = \sqrt{\overline{MQ}^2 + \overline{EM}^2} \\
& = \sqrt{(r\overline{MQ'})^2 + 5/8} \\
& = \sqrt{r^2\overline{FQ'}^2 + r^2\overline{FM}^2 + 5/8} \\
& = \sqrt{r^2\overline{FQ'}^2 + \frac{r^2}{12} + 5/8}
\end{aligned}$$

ist, ergibt sich mit $d = \overline{FQ}$ mit der oben berechneten Verteilungsfunktion $F_d(d)$ für den ersten Erwartungswert folgendes doppeltes Integral

$$\begin{aligned}
& E(\overline{EQ} | Q \in \widehat{ABCD}) \\
&= \int_0^{\sqrt{1/3}} \int_0^1 3r^2 f_d(d) \sqrt{r^2 d^2 + \frac{r^2}{12} + 5/8} dr dd \\
&= \int_0^{\sqrt{1/3}} f_d(d) \frac{1}{32(1+24d^2)^{3/2}} (4\sqrt{6+9d^2} \sqrt{1+24d^2} (17+48d^2) \\
&\quad - 225\sqrt{6} \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{8d^2}{5}}) dd \\
&\approx 0.83607672222174\dots
\end{aligned}$$

wobei

$$f_d(d) = F'_d(d) = \begin{cases} \frac{8}{\sqrt{3}} \pi s & \text{für } 0 \leq d \leq \sqrt{\frac{1}{12}} \\ \frac{8d(\pi - 3\arctan\sqrt{12d^2-1})}{\sqrt{3}} & \text{für } \sqrt{\frac{1}{12}} < d \leq \sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Für den zweiten Erwartungswert $E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \triangle ABC \wedge Q_2 \in \overline{DE})$ ergibt sich für ein gegebenes $t = \overline{DQ_1} = \overline{EQ_1}$ gemäß Satz 3 der Mittelwert zu

$$E_2(1, t, t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{8}(-1+2t)(1+2t) \ln \frac{1+2t}{-1+2t}$$

Da t die Dichtefunktion $t_{Pa}(t)$ besitzt, ergibt sich

$$\begin{aligned}
& E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \triangle ABC \wedge Q_2 \in \overline{DE}) \\
&= \int_{\sqrt{2/3}}^1 t_{Pa}(t) \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{8}(-1+2t)(1+2t) \ln \frac{1+2t}{-1+2t} \right) dt \\
&\approx 0.76110934819675\dots
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir numerisch

$$\begin{aligned}
& E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \widehat{ABCDE} \wedge Q_2 \in \widehat{ABCDE}) \\
&= \frac{4}{63} E(\overline{EQ} | Q \in \widehat{ABCD}) \\
&\quad + \frac{24}{63} E(\overline{Q_1Q_2} | Q_1 \in \triangle ABC \wedge Q_2 \in \overline{DE}) \\
&\approx 0.343030654692208\dots
\end{aligned}$$

8 Nachwort

Durch den Versuch, die einzelnen Schritte der Projektiven Reduktion anschaulich an Beispielen herzuleiten, mag es der Darstellung in einigen Punkten an Stringenz fehlen, dafür hoffe ich um so mehr, ein Gefühl für mögliche Herangehensweisen bei widerspenstigen Problemen vermittelt zu haben, das bei eigenen Berechnungen dem Leser zu Gute kommen sollte.

Bei steigender Dimension der bearbeiteten Probleme werden die resultierenden Integrale sehr anspruchsvoll und lassen sich teilweise nur mit Hilfe von symbolverarbeitenden Mathematikprogrammen (hier MAXIMA und *Mathematica*) lösen, die allerdings oft sehr zeitaufwändig “per Hand” angeleitet werden müssen, um zu einem verwertbaren Ergebnis zu gelangen. Beruhigender Weise schilderte Mr. Johan Philip bei der Berechnung seiner Ergebnisse ähnliche Schwierigkeiten, so dass dies weniger meinen mangelhaften Computerkenntnissen, sondern der Aufgabestellungen selbst geschuldet zu sein scheint.

Das Prinzip der Projektiven Reduktion kann auch weiter ausgedehnt werden, beispielsweise auf gekrümmte Körper, was allerdings meist zu Dichtegradienten der projizierten Punkte auf die Begrenzungsflächen führt, so dass die entsprechenden Dichtefunktionen (in Abhängigkeit von der konkreten Lage der Punkte) mit berücksichtigt werden müssen. Ebenso läßt sich die Anzahl der Projizierten Punkte erhöhen, was zur Untersuchung anderer Fragestellungen führt. Beide Erweiterungen würde den hier gegebenen Rahmen aber deutlich sprengen und sind weiteren Artikeln vorbehalten.

9 Literatur

Da es sich bei dieser Arbeit um keine Übersichtsarbeit handelt und die Grundidee der Projektiven Reduktion meinerseits ohne vorherige Literaturkenntnisse entwickelt werden konnte, wird auf ein ausführliches Literaturverzeichnis verzichtet.

Bei der vertieften Auseinandersetzung mit den Anwendungsmöglichkeiten erwiesen sich aber zwei Autoren für mich sehr wichtig, die ich deshalb hier nennen will. Das ist zunächst Eric W. Weisstein, Gründer der Online-Mathematik-Enzyklopädie 'MathWorld', der es mir, wie vielen anderen, ermöglichte, mir rasch einen Überblick über den Ergebnisstand in meinem Gebiet zu erhalten, und mich andererseits durch seine eigene Arbeit am 'Triangle-Line-Picking-Problem' insprierte, die Arbeit ganz fertig zu stellen und zusätzlich ins Englische zu übersetzen. Hier die konkrete Quelle dazu:

Weisstein, Eric W. "Triangle Line Picking."
From MathWorld—A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/TriangleLinePicking.html>

Weiter ist es Johan Philip, dessen Arbeiten ich durch die Recherchen auf MathWorld gefunden hatte, zu verdanken, dass ich den Ehrgeiz entwickelte, auch komplexe Verteilungsfunktionen im Detail zu berechnen, da seine eigenen Untersuchungen sehr souverän und inspirierend sind, insbesondere in höheren Dimensionen. Auch hier die Quelle zur Übersicht seiner Arbeiten:

<http://www.math.kth.se/~johanph/>